

Percorso didattico sulla ricorsione dalla natura al coding

Pasquale Cozza, Viviana Andreotti, Vittoria Cozza¹

Liceo Scientifico - Linguistico "Pitagora"

Via S. Pertini, 87036 Rende (CS)

{pasquale.cozza, vincenza.andreotti}@istruzione.it

¹DEI - Politecnico di Bari

Via E. Orabona, 4 - 70125 Bari

vittoria.cozza@poliba.it

Il presente lavoro è un percorso educativo didattico destinato ad una classe terza di un Liceo Scientifico. Partendo dall'osservazione di casi di ricorsione presenti in natura, e poi in quasi tutte le discipline umane, giunge alla sua definizione formale. L'obiettivo è insegnare agli allievi l'applicazione della ricorsione, come tecnica di programmazione alternativa, e il suo potere espressivo.

1.Introduzione

Il presente lavoro descrive un percorso educativo didattico pluridisciplinare destinato ad una classe terza di un Liceo Scientifico sul tema della ricorsione e la sua sperimentazione nella nostra scuola.

E' stato possibile affrontare questi temi avanzati perché la scuola incoraggia lo studio del coding [MIUR, 2016], pertanto gli allievi di classe III Liceo Scientifico, generalmente, dispongono delle conoscenze di programmazione di base. L'interesse verso il coding nella scuola è testimoniato da vari progetti a livello internazionale, come "*Beauty and Joy of Computing*" a New York [BJC4NYC, 2016], o "*The hour of code*", sponsorizzata in Italia dal MIUR e dal CINI [MIUR e CINI, 2016]. Gli allievi della nostra scuola, che hanno sperimentato il percorso, disponevano di conoscenze di coding, sviluppate inoltre attraverso esperienze di percorsi precedenti, come descritto in [Colistra e Cozza, 2014] e [Cozza e Gatto, 2015].

Poiché la domanda di metodo che proviene dagli studenti è quasi sempre fondata sul bisogno di correlare, in modo scientifico, ma accattivante, la realtà circostante con la dimensione astratta del linguaggio matematico e informatico, abbiamo pensato di sviluppare un'attività che rispondesse al bisogno di costruire insieme un percorso discorsivo (analitico e dimostrativo). Abbiamo cercato, così, di scoprire in classe la ricorsione, attraverso le sue affascinanti corrispondenze con la vita quotidiana e col mondo magico della natura.

Riportiamo di seguito in dettaglio la descrizione e la motivazione delle attività proposte attraverso la loro messa in pratica nella nostra sperimentazione, evidenziando anche opportunità e difficoltà emerse.

I dettagli sul percorso svolto ed i prodotti realizzati sono reperibili dal blog della scuola: http://www.ilpitagora.it/blog/?page_id=1202.

2. Attività esplorativa

Si mostra sulla LIM l'immagine di oggetti ricorsivi presenti in natura come il broccolo romanesco, la conchiglia del Nautilus e la felce (vedi Fig. 1). Dopodiché si invitano gli alunni a cercare somiglianze fra questi oggetti; da una attenta osservazione gli allievi riconoscono che si tratta di *“oggetti in cui c'è un frammento che si ripete sempre uguale, eventualmente con grandezze diverse”*. In modo intuitivo è stato introdotto il paradigma della *ripetizione*.



Fig. 1 - Esempi di ricorsione in natura

Se è subito chiaro agli studenti il concetto di ripetizione, non è altrettanto semplice per loro descrivere in modo formale l'oggetto visualizzato.

Per arrivare a una formalizzazione del problema si propone una riflessione sul ragionamento iterativo e ricorsivo, questo ultimo, poiché apparentemente lontano dal modo naturale di ragionare, si ipotizza fatto da un extraterrestre.

Esempio: Se dovessimo spiegare a un extraterrestre cosa è un treno, cosa gli diremmo? Supponiamo che egli ovviamente non conosca il significato di treno, ma assumiamo che conosca il concetto di vagone e sia ferrato in aritmetica. Potremmo perciò fornire la seguente spiegazione, che corrisponde a una definizione iterativa:

“Un treno è una sequenza di n vagoni attaccati l'uno all'altro, con n un qualunque intero positivo”.

Questa definizione sembra scontata e facile da comprendere, in realtà questo presuppone anche che l'alieno conosca il significato di *“sequenza”* e di *“attaccati l'uno all'altro”*.

In alternativa possiamo dire che *“Un treno è un oggetto composto da n vagoni (n intero positivo) definito nel modo seguente:*

- *se n è 1, è un semplice vagone;*
- *se $n > 1$, è un vagone, con un treno composto da $n-1$ vagoni attaccato dietro.”*

Può l'extraterrestre comprendere questa definizione? Dopo un momento di comprensibile smarrimento, se ha chiaro il significato di *“attaccato dietro”*

presumibilmente egli ci dirà: “*Ho capito*”. Il momento di iniziale smarrimento sarebbe dovuto all'impressione di trovarsi di fronte ad una definizione ciclica che richiederebbe, cioè un ragionamento che non può avere termine. Questa impressione, però, dovrebbe essere fugata dal fatto che, seguendo fedelmente la definizione, si deve necessariamente giungere al caso in cui $n=1$, che corrisponde ad una definizione esplicita di treno in termini di un concetto (il vagone) direttamente comprensibile dall'extraterrestre.

Abbiamo scoperto che l'extraterrestre può capire un concetto, di significato ignoto, quando lo si metta in relazione (lo si chiarisce, lo si descrive) con altri concetti di significato noto (paradigma iterativo) o quando lo si definisce in termini di se stesso (paradigma ricorsivo).

Quello del treno si rivela un esempio molto efficace, un esempio alternativo è quello del libro definito in termini di capitoli.

Da questo momento in poi, gli alunni non sono più stupiti da questo nuovo modo di definire, ma lo riconoscono come strumento lecito per esprimere delle definizioni.

3. La ricorsione nei vari ambiti della conoscenza

Una volta che gli allievi hanno acquisito familiarità col concetto di ricorsione, si propone loro di condurre delle ricerche sulla presenza della ricorsione in tutte le discipline umane, fornendo loro una webquest.

Gli studenti hanno rintracciato esempi di ricorsione in svariate discipline, gli esempi più interessanti sono di seguito brevemente riportati. Ricorsione in pittura, con il “*Polittico Stefanéschi*” (1320) di Giotto in cui è visibile il polittico stesso offerto a San Pietro dal committente Jacopo Caetani degli Stefanéschi, la “*Galleria di stampe*” e “*Le mani che disegnano*” di M. C. Escher.

Un altro esempio di pittura ricorsiva è l'effetto Droste. Esso prende il nome da una marca olandese di cacao, sulla cui scatola era presente l'immagine di un'infermiera che teneva in mano un vassoio con una tazza e una scatola della stessa marca.

Interessanti esempi vengono dal mondo musicale; in particolare, il docente ha illustrato la ricorsione presente nella Copertina di “*Ummagumma*” dei Pink Floyd (vedi Fig. 2), come dettagliatamente trattato in [Alessandrini, 2014]. Un allievo ha individuato un caso simile, nella sigla della serie tv “*Modern Family*”, <https://youtu.be/h66TdMI5n5I>.

Gli allievi hanno voluto approfondire se altri artisti avessero fatto uso di ricorsione nella presentazione dei loro album, nei video, nei testi delle canzoni e nella musica portando alla luce vari esempi pertinenti: il video “*Ciao*” di Lucio Dalla, <https://youtu.be/Hu80uDzh8RY>, e il video “*Bohemian Rhapsody*” dei Queen, <https://youtu.be/fJ9rUzIMcZQ>, il testo dell’ “*Abate cruento*” di Elio e le Storie Tese, <https://youtu.be/Wwd1A2DVQvc>.

La ricorsione nei testi è un argomento che richiede una più approfondita trattazione, il docente fa notare che esiste di tipo sintattico o semantico.

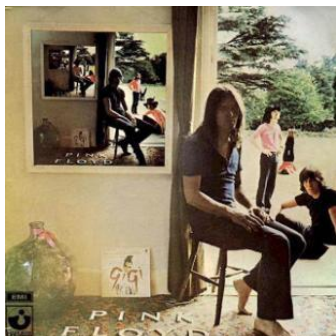


Fig. 2 - Copertina di Ummagumma dei Pink Floyd

Per il caso sintattico, il docente a questo punto suggerisce un esempio efficace: *“Alla fiera dell'Est”*, di Branduardi. Si analizza la struttura sintattica della canzone, ponendo attenzione al frammento:

*“Venne il macellaio, che uccise il toro, che bevve l'acqua,
che spense il fuoco, che bruciò il bastone, che picchiò il
cane, che morse il gatto, che mangiò il topo che al mercato
mio padre comprò.”*

La struttura sintattica di questo lungo periodo si può analizzare con due semplici regole, qui sotto riportate in Backus-Naur-Form, un metalinguaggio usato per descrivere la sintassi dei linguaggi, dove *D* sta per dichiarazione, *F* per filastrocca:

- 1) $D := \text{VERBO} + \text{GRUPPO NOMINALE}$
- 2) $F := D \mid D \text{ che } F$

Ai più accorti non è sfuggito che la seconda regola è ricorsiva: *una filastrocca può essere una frase dichiarativa, oppure una frase dichiarativa, la congiunzione “che” e un'altra filastrocca*. La regola dunque è definita nei termini di se stessa ed ecco il miracolo: con un sistema di regole così semplice si possono interpretare, o produrre, infinite filastrocche e perfino filastrocche infinite.

Per il caso semantico, dove cioè la ricorsione è nella storia, si propone la filastrocca *“C'era una volta un Re”*:

*C'era una volta un Re,
seduto s'un sofà,
lui disse alla sua dama:
raccontami una fiaba!
E la dama incominciò:
C'era una volta un Re
seduto s'un sofà...*

la storia raccontata dalla dama diventa il contenitore di un'altra storia raccontata, analoga per contenuto, e così via indefinitamente.

Infine, per terminare la nostra ricognizione nel mondo dell'arte abbiamo considerato e analizzato l'andamento del "*Crab Canon on a Möbius Strip*" di J. S. Bach (1747), <https://youtu.be/xUHQ2ybTejU>, [Hofstadter, 1990], e del "*Nuper rosarum flores*" di G Dufay (1436), composto sulla sequenza di Fibonacci per l'inaugurazione della cupola del Brunelleschi, <https://youtu.be/P9yzTTwAj5U>.

Esempi di ricorsione vengono anche dalla matematica: la sequenza di Fibonacci (1202), il fattoriale di un intero positivo, la potenza tra due numeri, l'algoritmo di Euclide (300 a.c. circa) per il calcolo del Massimo Comune Divisore, la funzione di Ackermann (1928).

Le ricerche hanno portato gli allievi alla scoperta dei frattali che li hanno sorpresi e incuriositi e saranno indubbiamente tema di attività future. Viene spiegato che si tratta di figure che si possono generare con un procedimento iterativo applicando delle trasformazioni alla figura in via di costruzione, per ottenere così una figura che è simile ad alcune sue parti (self-similarity, autosimilarità). Quest'ultima proprietà rende naturale l'uso della ricorsione per il disegno di frattali. Alcuni esempi semplici di frattali saranno proposti poi agli allievi, fra gli esercizi sulla ricorsione da realizzare, vedi Sezione 6.

4. Attività pratiche con la ricorsione

Visto l'interesse degli studenti per le foto e i selfie è stata suggerita loro una applicazione web 2.0 [Photo Editor Mobile, 2016] con la quale poter realizzare dei selfie ricorsivi. Come previsto, l'attività si è rivelata divertente e istruttiva. Si osserva che ancora una volta gli strumenti del web 2.0, come già mostrato in [Colistra et al, 2014], sono efficaci per contrastare la dispersione in presenza.

Si è fatto poi osservare in classe, come anche il dizionario sia un esempio di "*autoreferenzialità chiusa*" ovvero dove una parola rimanda all'altra e viceversa, per cui si deve possedere almeno uno dei due significati per uscire dal ciclo. Si chiede dunque agli allievi di trovare nel dizionario esempi ricorsivi (dal vocabolo *casa* ad *abitazione*; da *abitazione* a *casa*).

5. Esecuzione di un algoritmo ricorsivo

Tutte le nozioni introdotte fino ad ora, hanno l'obiettivo, fra l'altro, di guidare gli alunni al ragionamento induttivo e alla programmazione ricorsiva.

Per comprendere ancora meglio il paradigma della ricorsione, gli allievi vengono dapprima guidati a indovinare, attraverso la simulazione dell'esecuzione di una funzione matematica, cosa questa calcoli, dato un certo input. Si mostra un esempio di esercizio proposto:

$$d(n, m) = \begin{cases} d(n-1, m-1) & \text{se } m > 0 \\ n & \text{se } m = 0 \end{cases} \text{ con } n \geq m \geq 0$$

Viene poi presentato loro un classico gioco “Le Torri di Hanoi”. Si ricorda che l’obiettivo finale del gioco è: “Spostare n dischi dalla torre A alla torre C usando la torre B”, (vedi Fig. 3).

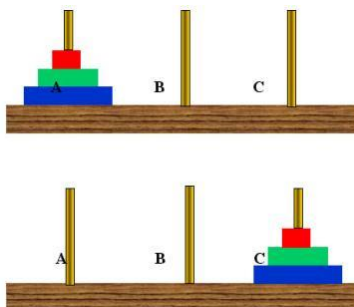


Fig. 3 - Configurazione iniziale e finale delle Torri di Hanoi a tre dischi

Gli studenti dovranno ora comprendere la seguente soluzione:

Hanoi(n, torreA, torreC, torreB)

Inizio

Se $n=0$ allora stop;

Hanoi($n-1$, torreA, torreB, torreC);

Disco(torreA, torreC);

Hanoi($n-1$, torreB, torreC, torreA);

Fine;

E' stata proposta una gara per scoprire chi, nel minor tempo possibile, e usando l'algoritmo precedente, sarebbe riuscito a eseguire il gioco, muovendo i dischi; in pratica, ciò è stato fatto sfruttando la versione online del gioco, disponibile da: <http://www.math.it/torrih/torri.htm>.

6. La ricorsione in laboratorio

Le nozioni apprese possono essere messe in pratica in matematica e in informatica, questa volta saranno gli allievi a dover pensare procedure ricorsive e addirittura a programmarle.

La scelta sul linguaggio di programmazione da usare è ricaduta sul linguaggio a blocchi Scratch [LKG, 2009] e la sua estensione Snap [Snap, 2016]. Entrambi sono linguaggi di programmazione visuale, drag-and-drop, inoltre Scratch è familiare agli alunni della nostra scuola in quanto già da noi usato per creare una storytelling [Cozza e Gatto, 2015].

Un esempio di esercizio assegnato, da risolvere in Scratch, è quello di raccontare la filastrocca “C’era una volta un Re”, menzionata in Sezione 3, tramite il paradigma ricorsivo. La soluzione attesa prevede un particolare tipo di ricorsione, chiamata ricorsione in coda, facilmente realizzabile in Scratch, si

veda nel Wiki in [LKG, 2009]. Per la soluzione svolta dagli studenti si veda: <https://scratch.mit.edu/projects/61392656/>,

Per guidare poi gli allievi a creare i loro primi programmi con Snap, è stato preliminarmente studiato il linguaggio, evidenziando le differenze con Scratch, a loro familiare. In particolare si sono affrontati i seguenti argomenti principali: una introduzione all'ambiente Snap; richiami sulle procedure con parametri, già note agli studenti; le procedure ricorsive (sintassi e semantica). In questa fase si è fatto riferimento a esempi proposti in [BJC4NYC, 2016].

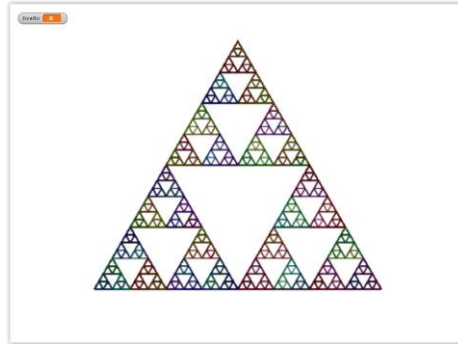


Fig. 4 - Triangolo di Sierpiński realizzato con Snap

Gli allievi sono stati guidati alla programmazione di funzioni ricorsive attraverso esempi. Si noti che il modo migliore per simulare i passi di un algoritmo ricorsivo ci è sembrato quello di lavorare alla realizzazione di figure, per validare più facilmente la correttezza dei risultati ottenuti.

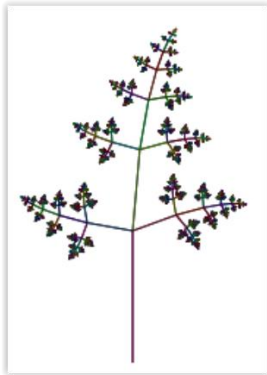


Fig. 5 - Felce di Barnsley

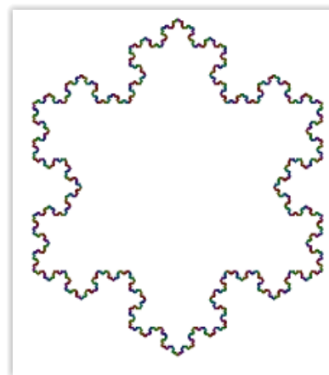


Fig. 6 - Fiocco di neve di Koch

In dettaglio, sono state mostrate in classe le procedure ricorsive per risolvere alcuni casi noti, il “*triangolo di Sierpinski*” (vedi Fig. 4), la “*felce di Barnsley*” (vedi Fig. 5), il “*fiocco di neve di Koch*” (vedi Fig. 6),

In questa fase, gli alunni sono stati molto colpiti dalla felce di Barnsley e dal fiocco di neve di Koch, poiché l'immagine realizzata era sorprendentemente vicina all'oggetto naturale, forse arrivando a comprendere per la prima volta l'affermazione *"To iterate is human, to recurse divine."* di L. Peter Deutsch. A questo punto gli alunni sono stati invitati a riprodurre gli esempi visti in classe.

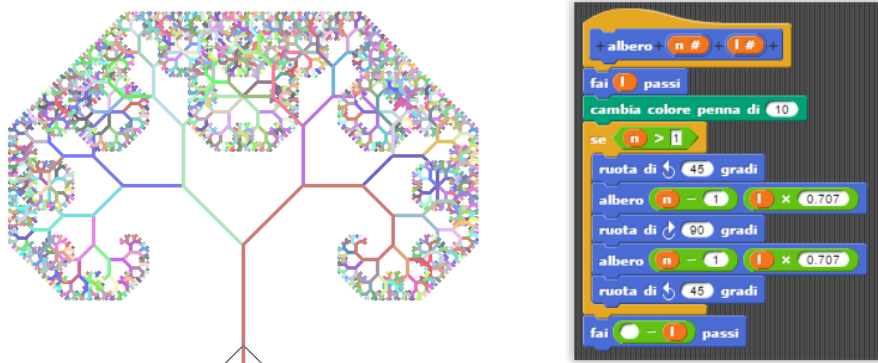


Fig. 7 - Albero iniziale e sua implementazione in Snap

E' stato chiesto agli allievi, di creare un albero modificando opportunamente il codice di un albero iniziale (vedi Fig. 7). Dando sfoggio di abilità e fantasia, hanno realizzato autonomamente alberi e frattali.

Interessante è l'esempio che chiameremo "albero a 3 rami", la cui raffigurazione appare realistica (vedi Fig. 8).

Durante l'attività laboratoriale gli alunni hanno commesso errori di programmazione, che hanno dato l'occasione per affrontare ancora in maggiore dettaglio lo studio delle chiamate ricorsive e della condizione di uscita dalla ricorsione. Ad esempio, funzioni programmate erroneamente, ovvero senza condizione di uscita, hanno portato gli allievi a sperimentare il problema del ciclo infinito.

Con tutti i disegni realizzati, in questa attività, una volta catturati col programma Gardwin [Gardwin, 2016], sono state realizzate delle gif animate con Gifmaker [Gifmaker, 2016]. Per approfondimenti sugli strumenti software di supporto alla creazione delle immagini del blog, si fa riferimento a [Cozza e Marincola, 2010] e [Musilli, 2013]

6. Conclusioni

L'attività qui presentata è stata una occasione per tentare di *"ridisegnare"* nuove modalità di approccio didattico, dove le tecnologie dell'informazione siano sia disciplina, sia strumento. Sul piano dell'acquisizione del concetto di ricorsione è opportuno sottolineare che esso è stato assicurato già nel momento relativo alla Sezione 2, attraverso l'esempio riportato. Sicché le

attività successive rappresentano tentativi di risposta alle domande centrali: quali caratteristiche significative definiscono il paradigma ricorsivo? Quali implicazioni con l'uso del coding? Abbiamo, dunque, cercato di confrontare, anche attraverso i suggerimenti dei ragazzi, una serie di esempi, ma pure informazioni legate alla dimensione filosofica, alla storia della matematica, alla storia dell'arte e dell'estetica, rintracciando i contributi più importanti che hanno portato all'uso della ricorsione nel linguaggio informatico. Il percorso è riuscito ad affascinare e a trasmettere, in modo semplice e coinvolgente, concetti fondamentali, e altrettanto complessi, della matematica e dell'informatica, ma non solo.

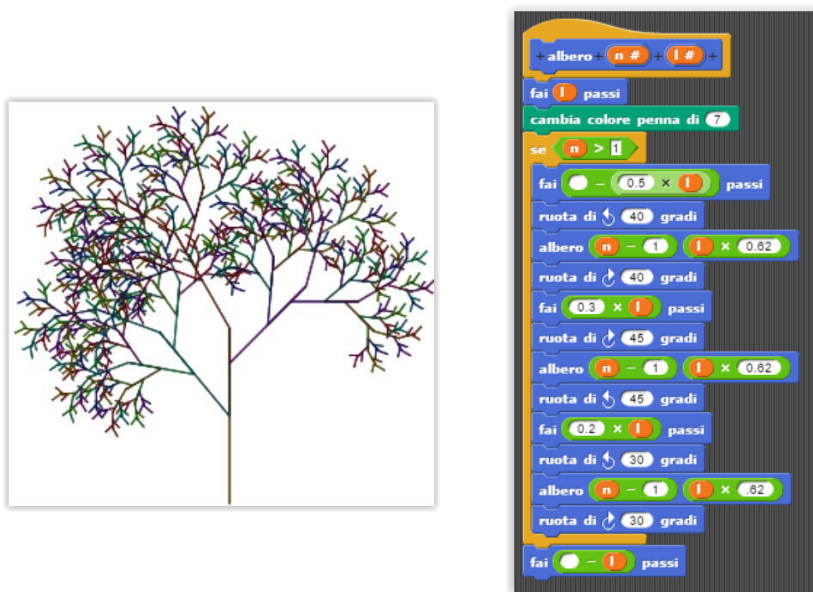


Fig. 8 - Albero a 3 rami, 7 livelli e sua implementazione in Snap

Bibliografia

[Alessandrini, 2014] Alessandrini P., La matematica dei Pink Floyd, Editore 40K, collana Altramatematica, 2014, <http://paoloalessandrini.it/>.

[BJC4NYC, 2016] Beauty and Joy of Computing by University of California, Berkeley and Education Development Center. Homepage: http://bjc.edc.org/bjc-r/course/bjc4nyc_2015-2016.html, 2016.

[Colistra e Cozza, 2013] Colistra B. e Cozza P., Percorso didattico sull'interazione uomo e robot, Atti del convegno "27^ DIDAMATICA 2013 - Tecnologie e Metodi per la Didattica del Futuro", Pisa, 783-792.

[Colistra et al, 2014] Colistra B., Cozza P., Palopoli S., L'uso degli strumenti web 2.0 per contrastare la dispersione in presenza, Atti del convegno "28^ DIDAMATICA 2014 - Nuovi Processi e Paradigmi per la Didattica", Napoli, 525-534.

[Cozza e Gatto, 2015] Cozza P. e Gatto A.T., Creative computing - Storytelling: Alice nel paese delle meraviglie, Atti del convegno "29^ DIDAMATICA 2015 - Studio ergo Lavoro. Dalla società della conoscenza alla società delle competenze", Genova, 35-42.

[Cozza e Marincola, 2010] Cozza P. e Marincola R., La bussola per il docente - Software gratuiti e risorse online per la didattica laboratoriale, Matematicamente.it di Antonio Bernardo, San Donato (LE), 2010.

[Gardwin, 2016] Homepage di Gardwin, <http://www.gadwin.com/>, 2016.

[Gifmaker, 2016] Homepage di Gifmaker, <http://gifmaker.me/>, 2016.

[Hofstadter, 1990] Hofstadter Douglas R., Gödel, Escher, Bach. Un'eterna ghirlanda brillante. Una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis Carroll, 1990, Curatore Trautteur G., Editore Adelphi.

[LKG, 2009] Lifelong Kindergarten Group, Scratch, MIT Media Lab, Cambridge, Massachusetts, 2009, <http://scratch.mit.edu/>.

[MIUR, 2016] MIUR, Piano Nazionale Scuola Digitale, http://www.istruzione.it/scuola_digitale/, 2016.

[MIUR e CINI, 2016] MIUR e CINI, Progetto Programma il Futuro, <http://www.programmailfuturo.it/>, 2016.

[Musilli, 2013] Musilli G., I software autore per la didattica - Percorsi creativi nella scuola primaria, Milano: Ledizioni, 2013, <http://books.openedition.org/ledizioni/138>.

[Photo Editor Mobile, 2016] Homepage di Photo Editor Mobile, <http://mail.photo4everyone.com/?lang=it>, 2016.

[Snap, 2016] Homepage di Snap, <http://snap.berkeley.edu/>, 2016.