Apologia della ragione scientifica - II: strumenti per decidere

Angelo Luvison

Sommario. *Svariati Paesi, inclusa l'Italia, si trovano a fronteggiare tempi duri e scenari complessi. La società civile sembra scossa da fenomeni di caos ed esclusione – fra cui il famigerato* digital divide *– molte economie sono in recessione, moltissimi giovani sono classificati come NEET (*Not [engaged] in Education, Employment or Training*), ecc. La soluzione alla crisi non si trova in ricette pronte all'uso; è necessario piuttosto focalizzarsi su: ricerca e innovazione, formazione e istruzione scientifiche d'eccellenza, nonché sullo sviluppo delle conoscenze relative. Le basi si trovano in strumenti quali: razionalità scientifica, probabilità e statistica bayesiana, pensiero logico. Nel nostro Paese, questo compito non è facile, ma dovremmo almeno tentare. L'articolo mostra diversi significativi esempi del cosiddetto "pensiero scientifico critico", sempre più richiesto da aziende high tech per le nuove posizioni di lavoro – si pensi anche ai* big data *– derivate da ICT, smart grid, green economy, advanced manufacturing, ecc.*

Abstract. *Today, a number of countries, Italy included, are facing very hard times. The social living leans towards chaos and exclusion – let alone the notorious digital divide – many economies have already plummeted, a high percentage of young persons belongs to the NEET (Not [engaged] in Education, Employment or Training) group, and so on. The solution cannot be based on ready-to-use recipes. Instead, a long-term strategy is needed to focus on: research and innovation; scientific training and education of excellence; and, therefore, development of the ensuing skills. The basis for that lies in the ability to master tools such as: scientific reasoning, probability and Bayesian statistics, mathematical logic. A task not at all easy in our country, but we should at least try. The paper shows a few meaningful examples of the so-called "scientific critical thinking", increasingly required by high-tech companies, especially for the new jobs – think of* big data *– e.g., from ICT, smart grid, green economy and advanced manufacturing.*

Keywords: Problem solving, Mathematical oddities, Ubiquitous Euler's *e*, Benford's law, Analytics

1. Introduzione

La matematica è la porta e la chiave delle scienze.
Trascurare la matematica è un'offesa al sapere, poiché chi la ignora non può conoscere le altre scienze o le cose del mondo
Ruggero Bacone

La cultura tecnico-scientifica italiana negli ultimi decenni non sembra godere di grande prestigio, e spesso neppure di buona cittadinanza, presso i non addetti ai lavori. È l'effetto dell'ostilità all'educazione scientifica radicata nella tradizione italiana, a partire da personalità pur notevoli come Benedetto Croce e Giovanni Gentile – avversari in politica ma con radici filosofiche comuni – in poi. Incancellabile dalla memoria è, ad esempio, l'episodio (1911) in cui Croce sbeffeggia il grande matematico ed epistemologo Federigo Enriques come dilettante incompetente in campo filosofico, oltre a qualificarlo di "ingegno minuto", caratteristica che sarebbe comune a tutti gli scienziati.

Le motivazioni e le conseguenze di questa polarizzazione della cultura italiana hanno per effetto la ricerca della contrapposizione, anziché di un rapporto armonico che riconosca la fondamentale unità dei saperi. Unità intesa non in modo retorico o ingenuo, bensì rispettosa dello statuto epistemologico individuale di ogni scienza metodologicamente fondata.

Scienza e ragione, fra l'altro, sono fortemente connesse in quanto la scienza è lo sviluppo culminante del pensiero razionale. Un esempio della scarsa influenza nella politica e nella società di scienza e ragione è il caso "stamina": nemmeno l'unanime appello del mondo scientifico biomedicale, guidato dalla senatrice a vita Elena Cattaneo, contro questa ingannevole ricetta per una malattia gravissima ha tuttora convinto larghi strati dell'opinione pubblica, del sistema politico, del mondo giudiziario.

Altri temi sui quali, soprattutto in Italia, l'irrazionalità si esprime ai massimi livelli sono quelli affini delle biotecnologie, dell'ingegneria genetica e, soprattutto, degli OGM (Organismi Geneticamente Modificati) in agricoltura (cibo e coltivazioni). Sorprende la disinformazione mediatica capeggiata da gastronomi, agronomi e associazioni di consumatori "bio", fomentati da pensatori modesti ma egregi uomini d'affari ed eccellenti imprenditori di sé stessi. Tutti costoro, seguaci di una "sociologia naïf", oltre che di mass media e talk show, godono del supporto ideologico ispirato da guru internazionali. Fra questi ultimi, un'attivista politica e ambientalista indiana è abituale frequentatrice di programmi televisivi, durante i quali i suoi strali si appuntano, in particolare, sul *golden rice*, un riso GM-modificato, che invece potrebbe fare un gran bene all'infanzia nelle aree più povere e depresse del mondo. Risulta che tale filosofa-ambientalista sia anche consulente di istituzioni pubbliche. Al contrario, le argomentazioni sostenute da studiosi seri e competenti – fra i quali Gilberto Corbellini, Dario Bressanini, Antonio Pascale – hanno scarsa presa sull'opinione pubblica prigioniera di credenze ingannevoli. Per una visione scientifica e documentata dell'intera questione, senza nulla concedere alla retorica o ai pregiudizi, si rinvia agli articoli, ancora della senatrice Cattaneo, usciti su *Il Sole 24 Ore* nel luglio 2014.

Parafrasando Francisco Goya, questi e altri casi ci parlano, quale più quale meno, di una ragione dormiente che partorisce mostri. In molte occasioni, gli scienziati sembrano costituire, invece, il bersaglio prediletto di buona parte dei media e degli opinion maker.

Svariati Paesi, inclusa l'Italia, si trovano a fronteggiare tempi duri e scenari complessi. La società civile sembra scossa da fenomeni di caos ed esclusione – fra cui il famigerato *digital divide* – molte economie sono in recessione, moltissimi giovani sono classificati come NEET (*Not [engaged] in Education, Employment or Training*), ecc. La soluzione alla crisi non si trova in ricette pronte all'uso; è necessario piuttosto focalizzarsi su: ricerca e innovazione, formazione e istruzione scientifiche d'eccellenza, nonché sullo sviluppo delle conoscenze relative.

Questo articolo, in continuità con il precedente [1], verte sull'importanza di un'adeguata preparazione tecnico-scientifica, partendo dal fatto prima sottolineato che la scienza nel nostro Paese è penalizzata rispetto a una cultura tradizionalmente orientata all'idealismo in tutte le sue declinazioni o qualificazioni ("vetero-", "neo-", ecc.). La tesi non è certamente nuova né originale, talché è oggetto di preoccupazione diffusa, come il lettore potrà agevolmente osservare scorrendo la vasta letteratura in proposito.

Anche nei settori più propriamente tecnici si deve riscontrare che non vi sono ancora segnali *concreti* di inversione di tendenza da parte dei nostri decisori politici, se si escludono annunci episodici o scontati riferimenti a modelli di migliori pratiche, quali la Silicon Valley e l'Università di Stanford, popolate bensì da ricercatori e ingegneri di origine italiana. Eppure, è accertato che l'offerta di professioni qualificate giunge oggi dalle imprese a maggiore contenuto tecnologico.

Venendo alle infrastrutture più avanzate, secondo l'Autorità per le garanzie nelle telecomunicazioni, le prestazioni delle connessioni a banda larga su rete fissa in Italia (47ª con una velocità media di 5,2 Mbit/s) risultano inferiori alle best practice internazionali. Ricordiamo che fino alla metà degli anni Novanta del secolo scorso si investiva in modo sostanzioso nelle fibre ottiche e nei relativi apparati: quei tempi sembrano ormai definitivamente andati.

Lo scenario di tecnologie e servizi ICT (*Information and Communications Technology*) sta diventando sempre più articolato e complesso, con macrotendenze così sintetizzabili: 1) il numero di dispositivi connessi a Internet (IoT, *Internet of Things*) nel 2020 supererà di parecchie volte la popolazione mondiale; 2) il *cloud computing*, spingendo su architetture aperte, richiederà standard altrettanto aperti e software di tipo *open source*; 3) strumenti e tecniche quantitative giocheranno un ruolo fondamentale nei *big data*, soddisfacendo requisiti crescenti di grandezza, complessità e velocità; a questo proposito, la teoria delle reti complesse [2], [3] ci potrà aiutare. Inoltre, l'esplosione della connettività di rete, caratterizzante questo nuovo scenario ICT, provocherà una radicale trasformazione del business. Purtroppo, non sembra che l'Italia attuale sia sufficientemente attrezzata in capacità di innovazione per fronteggiare un contesto globale caratterizzato da aspra competizione.

Naturalmente, non possiamo trascurare le poche lodevoli eccezioni che hanno permesso di costruire un Paese moderno, avanzato, industriale, che fa funzionare le infrastrutture di supporto all'intera economia nazionale. Ed è da sottolineare con forza che le eccezioni nazionali sono state permesse in virtù dell'alta formazione e dell'istruzione erogate da prestigiosi istituti tecnici, dalle facoltà scientifiche, dalle scuole di ingegneria e dai politecnici italiani. Ma occorre andare avanti per riprendere a crescere.

Il fenomeno big data, cioè delle grandi moli – o serie – di dati non strutturati prodotti dai moderni sistemi di transazione, interazione, monitoraggio e localizzazione, è oggetto di particolare attenzione da parte di aziende e imprese high tech per generare valore economico tanto per sé stesse quanto per i propri clienti [4]: "tutto mi parla di te" sembra essere il *Leitmotiv* di chi segue le nostre tracce in Rete.

Non sorprende quindi che aziende d'avanguardia ad alto contenuto tecnologico, come Google, Apple, Amazon, Microsoft e IBM, ricerchino persone *smart* (abili, "sveglie", "in gamba"), sottoponendo test, rompicapo, quiz di *critical thinking* e pensiero creativo nelle interviste per l'assunzione [5], [6]. In molte università americane si offrono corsi di master per formare esperti di dati e analisti [7], cioè per coloro che in generale operano in settori di business, economia e finanza, utilizzando modelli analitici (o *analytics*). Sono anche offerti insegnamenti universitari di *algorithmic thinking* in corsi di computer science con rompicapi di tipo algoritmico, che coinvolgono, implicitamente o esplicitamente, procedure più o meno codificate per risolvere problemi decisionali [8].

La nuova disciplina emergente va sotto il nome di *data science*, e i suoi adepti sono *data scientist*. Il saper prendere decisioni ponderate e intelligenti sui dati è diventato uno degli skill più importanti in tutte le aree delle attività con alto contenuto tecnologico. Il processo per apprendere le necessarie tecnicità strumentali è molto impegnativo, essendo richieste conoscenze concernenti una gran varietà di argomenti e tecnologie.

Colloqui di lavoro del tipo indicato sono anche condotti in modo da valutare la capacità del candidato a riflettere, ragionare e analizzare informazioni in maniera critica ed efficace per arrivare a una decisione corretta (problem solving). Alcuni dei test proposti sollecitano l'attitudine al ragionamento probabilistico-bayesiano, altri a quello logico, altri ancora alla mentalità interdisciplinare. In ogni caso, il denominatore comune va ricercato nel minimo indispensabile di competenze scientifiche e matematiche, già discusse in [1][1].

---

[1] *Lo sconcertante problema delle tre porte, trattato esaustivamente in quell'occasione, è illustrato come test d'intelligenza nel romanzo* Resistere non serve a niente *di Walter Siti, vincitore del Premio Strega 2013, ambientato nel mondo di banchieri e broker finanziari. C'è da dire che il problema è stato anche citato in altri romanzi (p. es.* Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte *di Mark Haddon) così come è stato proposto nel cinema (*21 *con l'attore Kevin Spacey). Peraltro, la dimostrazione in [1] della sua non intuitiva soluzione sembra particolarmente convincente, a detta degli amici che hanno avuto la bontà e la pazienza di esaminarla.*

In questo articolo di survey si riprende la stessa metodologia di [1] basata su concetti di razionalità scientifica, probabilità e statistica, pensiero logico, calandola nel contesto degli skill e degli strumenti sempre più richiesti da imprese d'avanguardia, con esempi rivolti a contesti reali. Riassumendo quanto prima detto, tali contesti derivano dall'offerta di nuove posizioni di lavoro per esperti di dati e di analisi – sia qualitative sia quantitative – (i già citati scienziati di dati), in seguito all'esplosione dei big data e quindi, in ultima istanza, in tutti i comparti dell'economia avanzata e della società in cui l'ICT gioca un ruolo dominante. A titolo di esempio, oltre all'ICT stessa, ricordiamo i principali ambiti applicativi: smart city, smart grid, green economy, advanced manufacturing, sanità, formazione e istruzione online (MOOC, *Massive Open Online Course*). I modelli analitici utilizzati sono prevalentemente predittivi e orientati alle decisioni, che devono perciò seguire processi metodologico-argomentativi rigorosi di *scientific critical thinking* (pensiero scientifico critico). Processi e decisioni che esigono peraltro una non trascurabile componente di creatività per arrivare a trovare soluzioni nuove a modelli di business in grado di fronteggiare i cambiamenti e le trasformazioni in atto.

Di singolari e fortuite coincidenze, statisticamente sorprendenti, si sono occupati saggisti e scrittori come Carl Jung, Arthur Koestler, Primo Levi, esperti di probabilità come Persi Diaconis, David Hand, Frederick Mosteller[2], e divulgatori matematici come Alex Bellos, Ennio Peres. Ciò significa che l'argomento delle coincidenze, di per sé affascinate e avvincente, merita un approfondimento (paragrafo 2) sia pure nei limiti di scopo della presente trattazione. Il tema, peraltro, è propedeutico a molti argomenti dopo sviluppati.

La soluzione di test, casi, problemi dipende dalla loro corretta formulazione. Nei paragrafi 3 e 4, si forniscono esempi di come, inquadrando un problema in modo improprio, si possa arrivare a decisioni incongrue. Gli strumenti principali sono la regola (o teorema) di Bayes nonché tutto il modo logico di ragionare che ne consegue.

Riferendosi ad applicazioni interdisciplinari, interessante è considerare la pervasività del numero irrazionale e = 2,7182818… di Eulero in problemi di probabilità apparentemente irrelati[3]. Senza dire dei metodi di calcolo comunemente adottati da ingegneri elettrotecnici ed elettronici, dove la e è diffusissima. Il paragrafo 5 ne riporta diversi esempi provenienti dai campi più disparati: calcolo del *throughput* di protocolli di comunicazione; scelta ottimale fra molti candidati (segretaria, moglie/marito); estrazione di carte da mazzi diversi; ecc.

Il paragrafo 6 esamina una di quelle stranezze che capitano spesso in probabilità, la legge di Benford, indicandone i settori applicativi, oltre che i poco noti legami con un'altra curiosità matematica, la successione dei numeri di Fibonacci.

Completano la rassegna le conclusioni nel paragrafo 7 e tre riquadri (strumenti di probabilità, crescita esponenziale, vincite sorprendenti alla lotteria) che approfondiscono o integrano alcuni aspetti illustrati nel testo.

---

[2] *A chi diceva "ci sono le bugie, le bugie sfacciate e le statistiche", Mosteller rispondeva piccato "è facile mentire con le statistiche, ma è ancora più facile mentire senza".*

[3] *Il numero* e *è una costante, il cui simbolo è in onore di Eulero, ma non è da confondere con la "costante di Eulero-Mascheroni", che è un altro bell'oggetto matematico, un po' misterioso, che qui non consideriamo.*

2. Coincidenze impossibili?

Il fato se la ride delle probabilità
Edward George Bulwer-Lytton

Con un campione sufficientemente grande, qualunque stranezza è possibile
"Legge dei numeri molto grandi" di Persi Diaconis e Frederick Mosteller

Non è affatto intuitivo comprendere – o riuscire a far comprendere – che di fronte a "un numero sufficientemente elevato di casi" anche gli eventi più strani, cioè di minor probabilità, possano accadere. D'altro canto, è diffusa la tendenza ostinata, o *pareidolia* in linguaggio psicologico, a vedere schemi e regolarità in sequenze puramente casuali di dati. Con pareidolia s'intende un processo psichico consistente nella elaborazione fantastica di percezioni reali incomplete, spiegabile con sentimenti o processi associativi, e che porta a immagini illusorie apparentemente dotate di una nitidezza materiale (per esempio, l'illusione che si ha, guardando le nuvole, di vedervi montagne coperte di neve, battaglie, ecc.). Pareidolia è quindi il contrario della logica dimostrativa intessuta di pro e contro di una data tesi.

Per una di quelle curiose e felici concomitanze (sincronicità secondo Carl Jung, singolarità secondo altri), che si verificano con non troppa infrequenza, mentre stavo scorrendo (marzo 2012) il libro *Coincidenze* [9], il suo autore Ennio Peres mi telefonò per chiedermi un contributo al mensile *Linus*. È da notare che con Peres non ci siamo mai parlati telefonicamente, né prima né dopo: i nostri (rari) contatti sono avvenuti e avvengono solo per email. Non si creda però a un caso di telepatia, quanto piuttosto a un evento che rientra tranquillamente nella sfera delle probabilità. Come osserva acutamente il matematico Persi Diaconis, "una giornata veramente insolita è una in cui non accade niente di insolito".

In definitiva quando i casi sono tantissimi – o le combinazioni di eventi moltissime – tutto può accadere. Ma in un mondo governato dalle probabilità non vi può essere certezza; di grande perspicacia è la sentenza: "Al mondo di sicuro ci sono solo la morte e le tasse", attribuita – forse arbitrariamente – a Benjamin Franklin.

Nel seguito del paragrafo, si illustra la probabilità dell'evoluzione biologica, mentre il riquadro 1 riassume un certo numero di strumenti fondamentali – testi, formule, teoremi – utili e d'uso comune in calcolo delle probabilità.

2.1. La vita e il caso

Charles Darwin ha stabilito i fondamenti della moderna biologia evolutiva con due concetti fondamentali: tutte le specie sono collegate le une alle altre tramite un antenato comune, e la selezione naturale riflette lo scambio (*interplay*) tra l'informazione ereditaria (in termini moderni, geni) e l'ambiente i cui le specie evolvono. Il percorso della discendenza di specie da un antenato comune è tradizionalmente rappresentato con un albero filogenetico. Analogamente, anche le storie dei geni possono essere descritte come alberi, benché possano differire significativamente dalla storia delle specie perché i geni sono influenzati da eventi evolutivi quali la duplicazione, la perdita o il trasferimento laterale.

Vediamo cosa succede in un caso di selezione, detto “Collo di bottiglia selettivo nei meccanismi di singolarità”[4]. Questo meccanismo si applica a una qualsiasi situazione in cui possibilità diverse siano sottoposte a un processo di selezione che permette la sopravvivenza di una sola di esse. La più familiare di tali situazioni si presenta nella selezione naturale darwiniana, in cui vari organismi possono competere per le risorse disponibili all'interno di ecosistemi; in questa lotta per l'esistenza, consegue alla fine il successo l'organismo meglio adattato all'ambiente e più capace degli altri a riprodursi nelle condizioni ambientali prevalenti. Si possono trovare, o simulare, molti altri casi di un processo fondamentalmente simile, a seconda della natura delle entità in competizione fra loro e di quella dei criteri di selezione. Così come si fa negli esperimenti di bioingegneria, molecole replicanti soggette a mutazioni possono essere costrette a passare per una strozzatura predisposta in modo tale da lasciar passare solo quelle molecole che presentano un'attività catalitica predeterminata, selezionando infine il più efficiente fra i catalizzatori rimasti.

Per definizione, un processo di selezione di questo tipo è ristretto alle varianti reali che sono soggette a esso. Potrebbero benissimo esistere un organismo o una molecola più adatti di quello o quella selezionati, solo che, se la variante richiesta non viene proposta, non può essere ovviamente selezionata. Quando, come spesso accade, hanno origine per caso più varianti, la probabilità che una di esse venga offerta per la selezione dipende dal numero di opportunità che essa ha di presentarsi.

Questa relazione può essere calcolata direttamente. Poniamo che p sia la probabilità dell'evento al primo tentativo, allora la probabilità che esso *non* abbia luogo è di $1 - p$ in un singolo tentativo e di $(1 - p)^n$ in n tentativi. La probabilità $P(n)$ che l'evento si verifichi se vengono date n occasioni è quindi di $1 - (1 - p)^n$. È interessante notare che il calcoli di $P(n)$, essendo la sua relazione bene approssimata da $n \times p$ per n grande, può essere effettuato in modo piuttosto semplice. Alcuni valori rappresentativi di $P(n)$ sono mostrati in tabella 1.

Ciò che con questo calcolo si intende illustrare è che il *caso non esclude l'inevitabilità*. Persino eventi altamente improbabili accadranno con una certezza quasi assoluta qualora si forniscano loro abbastanza occasioni. Un'interessante regola empirica è che, se si moltiplica il reciproco della probabilità dell'evento singolo per un po' meno di sette, si ottiene il numero di casi necessari per avere una probabilità di verificarsi del 99,9%.

[4] *Il resto di questo sottoparagrafo si basa sostanzialmente su [10].*

Gioco	Probabilità $P(n)$ per n =1	Valore di n per $P(n)$ = 99,9%
Lancio di una moneta	1/2	10
Lancio di un dado	1/6	38
Roulette (con un solo zero)	1/37	252
Lotteria (sette cifre)	$1/10^7$	69×10^6
Mutazioni puntiformi (errori di duplicazione)	$1/(3 \times 10^9)$ per divisione cellulare	20×10^9 divisioni

Tabella 1. Dal caso alla necessità. Gli esempi illustrano il numero n di occasioni richieste affinché un evento di probabilità p abbia il 99,9% di probabilità di accadere. Le stime sono basate sulla formula $P(n) = 1 - (1 - p)^n$, nella quale $P(n)$ è la probabilità di occorrenza dell'evento in n prove. (*Fonte: [10], con rielaborazioni*).

Come indicato nella tabella, addirittura un numero di sette cifre della lotteria uscirà in 999 casi su 1000 con 69 milioni di estrazioni. Questo dato usualmente non è noto agli acquirenti dei biglietti della lotteria, ma ha implicazioni profondamente significative per la storia della vita. Essa permette la possibilità di un'*ottimizzazione selettiva* in circostanze date, purché la gamma delle possibili varianti possa essere esplorata in modo esauriente. Il motto dell'evoluzione sembra essere *festina lente*, laddove procede inesorabile senza mai chiedersi a che cosa una mutazione possa servire. Né un evoluzionista si pone questa domanda, ma si chiede piuttosto "che cosa è successo?".

Si noti che il meccanismo sottostante alla tabella 1 è di crescita esponenziale [1]: un suo approfondimento si trova nel riquadro 2.

3. Le trappole cognitive della mente

La vita a volte fa in modo che ciò che sembra prevedibile non accada mai e che l'imprevedibile diventi la tua vita.
Viggo Mortensen, nel film *Appaloosa* (2008) di Ed Harris

Gli esempi di probabilità seguenti non necessitano di calcoli complessi, ma implicano sottigliezze non indifferenti dal punto di vista concettuale. Infatti, mostrano che, ricorrendo a soluzioni istintive basate sull'intuizione, si arriva spesso a risultati fallaci. In molti casi, non è vero che "la probabilità è senso comune ridotto a calcolo", come sosteneva il pur grandissimo Laplace.

Purtroppo, in questa materia le scorciatoie alla via maestra si possono praticare solo dopo che la si padroneggia più che bene.

Gli studi empirici [11] del Nobel Daniel Kahneman e colleghi, di grande rilevanza non solo nel contesto della psicologia applicata all'economia, hanno inaugurato un fertile filone di ricerche nella teoria delle decisioni (per una loro concisa illustrazione si rinvia a [1]). In estrema sintesi, la tesi sostenuta da Kahneman è che l'*Homo oeconomicus* è tutt'altro che razionale quando deve prendere decisioni strategiche, tesi basata su decine di esperimenti volti a dimostrare il presunto "collasso, o scacco, della ragione".

3.1. Interviste "rischiose"

Questo paragrafo potrebbe essere scherzosamente intitolato "Quando il calcolo delle probabilità ti può salvare la pelle".

L'eccessivo rischio finanziario, per non dire d'altre cause, non è certamente una caratteristica recente né una peculiarità di questi ultimi sette-otto anni. Già il caso di poco precedente, la bolla speculativa della new economy all'inizio del 2000, è istruttivo sotto questo profilo: allora ci fu chi comprò per milioni di dollari startup, con pochissimi dipendenti, che non offrivano prodotti né tecnologie né servizi, se non un ambizioso business plan. Non ci si può certo stupire se vi furono poi fallimenti a catena.

Una leggenda metropolitana narra che nei ruggenti anni di quel periodo consulenti di banche di investimento e società finanziarie in Wall Street facessero ricorso a una tecnica un po' troppo spiccia per valutare i candidati all'assunzione e saggiarne la velocità di reazione in situazioni di rischio [5]. Come è noto, molti nordamericani sono tuttora affascinati dall'epopea del Far West e dalle armi, nonché dalla roulette russa, gioco reso popolare dal film *Il cacciatore* di Michael Cimino con una memorabile interpretazione di Robert De Niro.

"Giochiamo alla roulette russa" – esordiva il fantasioso reclutatore – "Giovanotto, sei legato alla sedia. Qui c'è una pistola a tamburo, a sei colpi, tutti vuoti. Introduco due pallottole in camere adiacenti. Chiudo il cilindro e lo faccio ruotare. Ti punto la pistola alla testa e premo il grilletto. Click. Sei ancora vivo. Che fortuna! Ora, prima di discutere il tuo curriculum, tirerò nuovamente il grilletto: preferisci: a) che faccia ruotare prima il tamburo, o b) che prema subito il grilletto?".

Non è certamente opportuno cercare di risolvere il problema, venato di un umorismo un po' macabro, per via sperimentale: con il ragionamento basato sulle probabilità emerge che è più conveniente (*sic*!) farsi sparare un altro colpo subito, piuttosto che dopo aver fatto girare il tamburo.

Infatti, essendoci due pallottole, quattro camere su sei sono vuote. Ogni volta che l'intervistatore ruota il cilindro e preme il grilletto, si hanno quattro su sei, o due su tre, probabilità di sopravvivere, cioè il 67%.

I quattro colpi vuoti sono tutti contigui. Se all'inizio l'intervistatore preme il grilletto e il giovanotto sopravvive, significa che uno delle camere vuote gli ha salvato la vita. Per tre di queste quattro camere vuote, la camera successiva sarà ancora vuota. La rimanente (quarta) camera vuota è proprio prima di una delle due pallottole. Questo significa che, *se non si ruota il cilindro*, si hanno tre su quattro probabilità di salvare la pelle, cioè il 75%. Il 75% è maggiore del 67%, perciò la strategia ottimale per il giovane intervistato è di chiedere di non ruotare più il tamburo.

3.2. Il paradosso del razzista, ovvero quando l'ignoranza (statistica) genera paura

Il ragionamento per risolvere correttamente questo caso e il successivo utilizza la regola di Bayes, approfondita nel riquadro 1.

In una città vive un nero ogni dieci abitanti (la probabilità di essere nero è del 10%). Una persona denuncia di essere stata aggredita da un uomo di pelle scura. La polizia simula più volte la scena, nelle stesse condizioni di luce, con persone diverse nella parte dell'aggressore. Nell'80% dei casi l'uomo indica correttamente se il simulatore è bianco o nero (cioè, il test è preciso all'80%). Ma nel 20% si sbaglia. Domanda: quant'è giustificata la sua convinzione che il vero colpevole sia nero?

All'80%, sarà la risposta più frequente. Invece, non è così! Per fare una stima corretta bisogna tener conto di quanti neri ci sono in città. Il 10%, abbiamo detto. Dunque, su 100 persone 10 sono nere. Di queste, 2 verranno identificate erroneamente come bianche e 8 correttamente come nere. Dei rimanenti 90 bianchi, 18 verranno identificati erroneamente come neri. La probabilità che l'aggressore sia nero è dunque solo di 8/26, dal momento che ne identifica 26 come neri ma solo 8 lo sono effettivamente. Il valore 8/26 è quasi il 31%, altro che l'80%!

Si aggiunga che se i neri fossero non il 10% ma, per esempio, l'1% (cifra assai più vicina alla realtà degli immigrati in Italia) la probabilità di avere ragione per l'aggredito crollerebbe a poco meno del 4%. Invece, con l'aumentare del numero dei neri le probabilità dell'aggredito di avere ragione aumenterebbero significativamente. Fin quasi alla certezza assoluta. Ma allora egli vivrebbe in una città in cui tutti (a parte lui) sono neri.

Tirando le somme, la lezione da trarre è che dobbiamo guardare ai fatti, alla scienza, non alla paura.

Questo paradosso ci porta direttamente alla "fallacia dell'accusa", un caso giudiziario esemplare nella giurisprudenza USA e, quindi, oggetto di studio nelle scuole di legge statunitensi.

3.3. "Lo Stato di California contro i Collins", ovvero la fallacia dell'accusa

People v. Collins, un procedimento legale in California nel quale si è fatto uso del calcolo delle probabilità, fornisce un eccellente esempio di come caratterizzando in modo impreciso il contesto del problema possa portare a una decisione errata [7].

La storia è rapidamente detta. Un'anziana, mentre camminava in un viale di un sobborgo di Los Angeles, venne assalita e derubata. Un testimone dichiarò di aver visto una donna bianca con capelli biondi raccolti a coda di cavallo correre per il viale ed entrare in un'auto (parzialmente) gialla guidata da un nero con baffi e barba. Una coppia – i Collins, appunto – corrispondente all'incirca alla descrizione fu arrestata e successivamente processata. Al processo l'accusa convocò, come teste, un giovane docente di probabilità della sede locale (Long Beach) dell'Università statale di California[5], che prese in considerazione le sei caratteristiche, indicate dall'accusa stessa: uomo nero con barba – probabilità di un 1/10; uomo con baffi – 1/4; donna con capelli biondi – 1/3; donna con coda a cavallo – 1/10; automobile parzialmente gialla – 1/10; coppia interetnica in auto – 1/1.000. Applicando la regola del prodotto, il professore ottenne immediatamente la probabilità di 1/12.000.000 che la coppia fosse in possesso delle caratteristiche indicate dalla testimone.

La giuria emise un verdetto di colpevolezza, confermata in appello, ma il ricorso finale alla Corte Suprema della California rovesciò il giudizio, a causa dell'insufficiente fondatezza nei valori numerici dei sei fattori di colpevolezza e l'ovvia mancanza della loro indipendenza statistica.

Ma c'è un elemento ancora più importante. Anche se la conclusione dell'accusa fosse stata corretta da un punto di vista aritmetico (valori realistici e indipendenza statistica), ciò non avrebbe provato irrefutabilmente la colpevolezza dei Collins. Il punto chiave non è la probabilità che la coppia accusata corrisponda alla descrizione della testimone, ma la probabilità che *vi siano* altre coppie corrispondenti alla descrizione. La probabilità di almeno un'altra coppia, su 12 milioni, in linea con la descrizione risulta essere almeno del 41% (si può usare la regola di Bayes con la distribuzione di probabilità binomiale o, essendo il numero delle coppie molto alto e 1 su 12 milioni molto piccolo, l'approssimazione con la funzione di distribuzione di probabilità di Poisson – si vedano [14], [15] e anche il riquadro 1). Questo secondo calcolo fu condotto da Laurence Tribe [12], allora giovane assistente (*law clerk*) del giudice capo. Tribe avrebbe poi intrapreso una brillante carriera accademica a Harvard, avendo come studente e assistente Barack Obama, oltre a numerosi altri allievi di successo.

L'ovvia morale della storia è che una scorretta impostazione del problema non può che condurre a decisioni sbagliate.

C'è però un "però". Il procedimento basato sulla regola di Bayes è indubitabilmente convincente e senza pecche dal punto di vista probabilistico, a differenza del metodo che assume l'indipendenza statistica delle probabilità singole e seguito in prima istanza. Tuttavia, anche la decisione della Suprema Corte sarebbe potuta essere diversa, qualora fossero emerse dal dibattimento altre evidenze o prove significative contro i Collins, aumentandone così la probabilità *a posteriori* di colpevolezza.

---

[5] Parlando di curiose e fortuite coincidenze, è interessante notare [12] che l'accusatore Ray Sinetar era cognato di Ed Thorp il geniale matematico, amico di Claude Shannon. Abbiamo già incontrato Thorp nel lavoro [13] sul primo vero computer "indossabile" realizzato per vincere alla roulette, e sulla teoria dell'informazione applicata ai giochi d'azzardo. Forse, l'ingenuità dell'accusatore fu di rivolgersi a un docente poco esperto, anziché al proprio cognato, ben più versato nelle probabilità.

Si può notare che il metodo di calcolo qui adottato è lo stesso del paradosso del razzista (paragrafo 3.2) e dei test medici nell'articolo [1]. Proprio come i risultati dei test medici possono essere equivocati se non si applica (correttamente) Bayes, la fallacia dell'accusatore riguarda il fraintendimento di informazioni probabilistiche: l'errore risulta dallo scambio della "probabilità di essere in possesso delle caratteristiche di colpevolezza" con la "probabilità di essere colpevoli, stante il fatto che si presentano le caratteristiche di colpevolezza".

Nel 1994 il Federal Judicial Center statunitense ha pubblicato e distribuito a tutti i giudici federali il *Reference Manual on Scientific Evidence*, una corposa guida introduttiva all'applicazione di metodi scientifici in campo forense. Il *Reference Manual* è rapidamente diventato un best seller, tant'è che oggi è giunto alla terza edizione. Non risulta che qualcosa di analogo sia stato predisposto per i magistrati italiani.

4. L'approccio bayesiano

Puoi trovare la verità con la logica solo se l'hai già trovata senza di essa

Gilbert K. Chesterton

Thomas Bayes (1701 - 1761)

Come detto, il teorema – o regola – di Bayes è uno strumento potente di calcolo, consentendo di aggiornare (ovviamente in termini probabilistici) l'informazione che aumenta sulla base dell'esperienza. Infatti, anche se al crescere delle osservazioni a favore, un evento non diventa sempre più vero, diventa tuttavia "più verosimile", cioè più probabile.

Il teorema di Bayes costituisce il punto di partenza per l'approccio soggettivo alle probabilità – o *Bayesianism* (ragionamento bayesiano) come si tende a dire oggi – basato sulla interpretazione della probabilità come "grado di convinzione (soggettiva)". L'origine è bensì la regola bayesiana (usata da tutti gli esperti del settore), ma il bayesianesimo va oltre il metodo di calcolo, essendo inteso come una concezione paradigmatica delle probabilità: il "probabilismo". In questo ambito, tuttora insuperabili sono i due volumi *Teoria delle probabilità* (1970) di Bruno de Finetti, grande matematico del Novecento.

4.1. L'analisi bayesiana dei big data

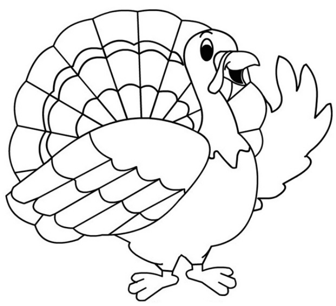
Saper prendere decisioni fondate su criteri probabilistico-bayesiani è un mezzo utilissimo per governare – e non subire – l'incertezza nei diversi campi di applicazione. A questo scopo è indispensabile separare ciò che è "segnale" (informazione utile) da quanto è "rumore" (disturbo), obiettivo primario di ogni tipo di comunicazione. Con tecniche sia qualitative sia quantitative, Nate Silver, statistico ed esperto di politica, ha correttamente previsto l'esito elettorale in tutti i 50 Stati delle ultime elezioni presidenziali USA nel 2012 [16], dimostrando le potenzialità applicative della metodologia [17]. Tant'è che, secondo molti opinionisti, i big data associati all'analisi bayesiana sono da ritenere i veri vincitori delle ultime elezioni americane: Obama e il suo staff hanno saputo leggere nel cuore degli elettori che interagivano tra di loro – tramite personale computer e/o smartphone – scambiandosi pareri e opinioni. Le informazioni utili prodotte da queste interazioni sono state in quantità impressionante.

Se da un lato algoritmi *data driven* – alimentati cioè dalle masse imponenti di dati – dimostrano di poter essere realizzati con sempre maggiore efficacia, dall'altro lato si rende necessario lo sviluppo di nuovi strumenti matematici. La disciplina detta *analytics* (che potremmo tentare di rendere in italiano con "analiticità"), essendo rivolta a scoprire e sfruttare le regolarità nei dati, si basa sull'applicazione di statistica, programmazione software, ottimizzazione matematica.

Nel trattare i big data è necessario un pacchetto di competenze di analytics quali: 1) basi dati per gestire e visualizzare masse imponenti di dati non strutturati; 2) conoscenza di tecniche di apprendimento automatico, di reti neurali e di inferenza statistica; 3) modelli predittivi per valutare l'affidabilità delle conclusioni. Si comprende allora come il paradigma bayesiano, e, casomai, la legge di Benford (cfr. il paragrafo 6), possano avere un ruolo non marginale in questo nuovo importante settore.

4.2. C'era una volta un tacchino "induttivista"…

Hope for the best, prepare for the worst
Esempio di pragmatismo British



William Feller [14] raccomanda, giustamente, grande cautela nel caricare di significati metafisici la regola di Bayes (si veda anche il riquadro 1). A questo proposito, Feller cita Platone che con argomentazioni di tipo induttivo cercava di dimostrare l'esistenza di Atlantide, nonché quei filosofi settecenteschi che pretendevano di demolire la meccanica newtoniana.

Un istruttivo esempio di azzardata applicazione filosofica è la metafora del "tacchino induttivista" nella forma ideata da Bertrand Russell.

La storia[6] riguarda un tacchino sempre più convinto della benevolenza dell'allevatore che lo nutre, fino a quando questi non gli tira il collo. Fin dal primo giorno il tacchino osserva che, nell'allevamento dove è stato portato, gli viene

[6] *Il testo seguente è adattato da Wikipedia.*

dato il cibo alle 9 del mattino. E da buon induttivista non è precipitoso nel trarre conclusioni dalle sue osservazioni; ne compie molte altre in una vasta gamma di circostanze: di mercoledì e di giovedì, nei giorni caldi e nei giorni freddi, sia che piova sia che splenda il sole. Così arricchisce ogni giorno il suo elenco di una proposizione osservativa nelle condizioni più disparate, finché non è pienamente soddisfatto Allora elabora un'inferenza induttiva come questa: "Mi danno il cibo alle 9 del mattino". Sfortunatamente, però, la sua conclusione si rivela incontestabilmente falsa alla vigilia del *Thanksgiving Day*, quando finisce in pentola, cotto a puntino.

Aveva già capito tutto Ennio Flaiano che nel *Diario degli errori* commentava amaramente: "Aumentano gli anni e diminuiscano le probabilità di diventare immortali".

Con logica opposta alla logica dimostrativa, i catastrofisti, millenaristi, apocalittici di tutte le latitudini non tengono conto dei sistematici fallimenti delle loro profezie sulla fine del mondo, evento (quasi) certo, ma non prevedibile *a priori*. La fine del mondo è stata vaticinata e con impressionante regolarità nel corso della storia umana, sempre con grande cassa di risonanza da parte dei mezzi di comunicazione di massa: oltre agli organi del corpo, si è forse evoluta nell'umanità l'esigenza di pronosticare il futuro senza argomentazioni valide. Coloro che annunciano catastrofi cosmiche diventano interessanti soltanto se si oppongono alla ragione. Anche una delle ultime profezie, quella attribuita (erroneamente) all'ignaro popolo maya, è andata, com'era del tutto ovvio, disattesa. Sembra ancora quanto mai attuale l'ammonimento di Orazio: "Non cercar di sapere quel che avverrà domani". Corre peraltro l'obbligo di osservare che i profeti dell'apocalisse nel lunghissimo termine avranno sicuramente ragione, quando il mondo finirà.

In sintesi, l'approccio basato sull'induzione non offre certezze assolute, ma consente valutazioni attente, oculate e pragmatiche sulla base degli assiomi della probabilità. Russell e molti altri hanno correttamente evidenziato i limiti del ragionamento esclusivamente basato sull'esperienza. Ma usare la mancanza di certezze assolute per ricusare le argomentazioni scientifiche sarebbe un limite ancora peggiore, perché non consentirebbe alcun progresso. L'assunto corretto è che l'esperienza è madre di scienza e che l'uso della ragione si può migliorare, purché tenacemente e costantemente esercitato. Il probabilismo ben temprato con Bayes e strumenti simili ci offre modelli interpretativi della realtà, che non si stupiscono di cigni neri, fenomeni naturali catastrofici, atti terroristici, crolli economico-finanziari, vincite strabilianti al gioco d'azzardo e altri eventi estremi, sia positivi sia negativi.

4.3. Sulla percezione dei rischi

L'approccio bayesiano è fondamentale anche nella valutazione dei rischi. "Il rischio è, tecnicamente, la probabilità che si verifichi un evento indesiderato. Quanto più grande è la probabilità e quanto più è indesiderato l'evento, maggiore è il rischio" è la definizione semplice, elegante, ineccepibile, proposta da Simona Morini [18].

Anche se il rischio è vissuto nell'opinione comune con scarsa o nulla razionalità, i tecnici, al contrario, sono capaci di articolare applicazioni e innovazioni che riducono i rischi, senza bisogno di ricorrere al famigerato "principio di precauzione" tanto caro ad ambientalisti, filosofi continentali e neoluddisti in genere. Il principio di precauzione, nella sua formulazione più radicale, condurrebbe alla stasi completa perché pretende la garanzia dell'assenza completa di rischi. Applicandolo alla lettera, non dovremmo neppure mangiare o uscire di casa.

Invece, l'analisi dei rischi, basata su una ponderazione oculata delle probabilità (probabilismo, *Bayesian assesment*, *rational critical thinking*), è quanto è necessario per contemperare tanto lo sviluppo e la crescita dell'economia quanto l'attenzione alla natura. I rischi si possono – e si devono – controllare, mitigare, minimizzare, ma non certo azzerare.

A protezione dai rischi ci sarebbero le assicurazioni, tuttavia: "Ci sono cose peggiori della morte. Se hai passato una serata con un assicuratore, sai esattamente cosa intendo", ammonisce un pungente Woody Allen.

5. L'ubiquità del numero e di Eulero: la regola del 37%

Forse il lettore sarà sorpreso, tanto quanto lo sono stato io, a scoprire come il numero irrazionale e = 2,7182818… si materializzi, quasi per magia, in problemi di probabilità, apparentemente diversi: calcolo del *throughput* in sistemi di telecomunicazione; scelta del migliore candidato (segretaria, moglie/marito,…); estrazione di due carte successivamente sempre differenti da due mazzi diversi; ecc. La ragione di base è che il numero e fa capolino in un gran numero di relazioni matematiche (riquadro 1). Nella fattispecie, si presenta laddove per molti problemi in ambiti probabilistici diversi il calcolo combinatorio è uno strumento fondamentale e, quindi, unificante. Questo calcolo, riguardando ordinamenti, configurazioni e combinazioni di elementi distinti, risponde a domande del tipo: "In quanti modi è possibile…?", "Quanti/quante sono...?". Ebbene, possono risultare tante, tantissime combinazioni che, non raramente, sono in numero sorprendentemente alto (riquadro 2).

Né si deve dimenticare la relazione, giudicata da molti la più bella della matematica, ovvero l'identità di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$, dove i, per definizione, è l'unità immaginaria, $i = \sqrt{-1}$ ovvero $e^{i\pi} = -1$. Da quest'ultima identità, che rappresenta la rotazione di un vettore di π radianti su un piano cartesiano[7], discende la metodologia comunemente impiegata in elettrotecnica, elettronica e telecomunicazioni per l'analisi o la sintesi di sistemi. Si tratta del ben noto calcolo operazionale basato sulla notazione di Oliver Heaviside, dove però la i è solitamente sostituita dalla j per evitare confusioni con il simbolo della corrente elettrica.

[7] *In probabilità, oltre a e, anche π emerge con impressionante frequenza. Per esempio, il "problema dell'ago di Buffon" stabilisce una relazione tra un esperimento puramente casuale, cioè una simulazione aleatoria, e π. (Il conte di Buffon è il grande naturalista francese ricordato anche per la lapidaria sentenza: "Le style c'est l'homme même – Lo stile è l'uomo stesso").*

5.1. Sistemi di comunicazione Aloha

I sistemi Aloha si basano su protocolli di comunicazione per l'accesso multiplo a un mezzo condiviso da parte di *n* utilizzatori. Sono stati proposti e sviluppati – in particolare da Norman Abramson – negli anni Settanta del secolo scorso per consentire l'accesso radio alle sedi dell'Università delle Hawaii, sparpagliate su diverse isole. La variante a slot del protocollo è quella che garantisce la massima efficienza (o throughput), riportato in tabella 2 [19].

Il calcolo, che qui vi risparmiamo, facendo elegante uso degli strumenti indicati nel riquadro 1 – distribuzione binomiale e formula limite per la *e* – conduce a un throughput massimo del 37% circa, precisamente 1/*e* = 0,367879…, allorché il numero di stazioni del sistema tende a infinito. Con 100 stazioni l'efficienza massima è un po' superiore, cioè 0,370, e 0,372 con 50. Un numero di stazioni anche solo di qualche decina fornisce prestazioni vicine al caso (peggiore) di infinite stazioni. Inoltre, sempre in [19] è dimostrato che, qualsiasi sia *n*, il massimo è raggiunto quando il numero medio di tentativi di trasmissione da parte delle stazioni è 1.

Numero *n* di stazioni	**1**	**2**	**5**	**10**	**20**	**50**	**100**	∞
Throughput massimo	1	0,5	0,41	0,387	0,377	0,372	0,370	0,368

Tabella 2. Protocollo Slotted Aloha: throughput massimo al crescere del numero *n* di stazioni. *(Da [19])*.

Il throughput massimo del protocollo, al variare di *n*, è anche calcolabile analiticamente mediante la formula $(1 - 1/n)^{(n-1)}$ [19], il cui limite (per *n* tendente all'infinito) è appunto 1/*e*.

5.2. Il problema della dote

Si tratta del problema (della dote o della segretaria o dell'anima gemella, ecc.) di sapersi fermare al momento giusto in una ricerca sequenziale (strategia di *optimal stopping*), problema affrontato da molti studiosi – fra cui il noto esperto di giochi matematici Martin Gardner.

Consideriamo la versione data, come il solito, da Mosteller [20]. Un re, per provare la saggezza di un suo giovane consigliere, gli offre l'occasione di sposare la damigella di corte in possesso della dote maggiore. L'ammontare di tutte le doti è scritto su altrettanti foglietti di carta che vengono opportunamente mischiati. Un foglietto è estratto a sorte e il consigliere deve scegliere se la corrispondente dote sia la più alta o meno. Decidendo di sì, prende in sposa la damigella (con la relativa dote) se coglie nel segno; altrimenti, non ottiene alcunché. Se non opta per l'ammontare scritto sul primo foglietto, può scegliere o rifiutare il successivo, e così via finché non sceglie una damigella oppure l'elenco è giunto al termine. Naturalmente, una volta che il consigliere decide di andare avanti, non può più tornare a una dote già rifiutata. In tutto, partecipano 100 nobili fanciulle, ciascuna con una differente dote: qual è la scelta ottimale da seguire per massimizzare la probabilità che la damigella prescelta sia la più ricca?

In generale, la questione è se vi sia o no una chance maggiore di 1/100, essendo cento le damigelle. Il più delle volte, si fanno poche prove prima di scegliere, quando addirittura non ci si ferma alla prima che capita, rischiando però grosso. La soluzione del problema – basata sulla tabella 3 – pur elegante, non è intuitiva né facilmente prevedibile.

n	***s***	**probabilità massima**	***n***	***s***	**probabilità massima**
1	1	1,00	10	4	0,399
2	1	0,50	20	8	0,384
3	2	0,50	50	19	0,374
4	2	0,458	100	38	0,371
5	3	0,433	∞	*n/e*	1/*e* (~ 0,368)

Tabella 3. Problema della dote con *n* candidate: valori *s* di scelta ottimale e corrispondente probabilità massima di vincita. (*Da [20]*).

La tabella in prima colonna riporta il numero *n* = 1, 2, 3,… di doti ("candidate" a essere prescelte), in seconda la candidata *s* corrispondente alla probabilità massima di successo, la quale è espressa nella terza colonna. Da essa, risulta chiara la strategia ottimale: per *n* = 100, si lasci passare la 37° candidata e si scelga poi la prima dote che risulta la più alta rispetto a tutte le precedenti.

Per valori di *n* ancora maggiori la regola – o algoritmo di scelta – è di far passare approssimativamente la frazione 1/*e* della distinta e scegliere poi la dote migliore di tutte quelle già viste: la probabilità di vincita è prossima a *1/e*, il massimo teoricamente possibile.

Questo gioco, che a prima vista sembrerebbe garantire solo una probabilità di vincere pari a 1/*n*, ha un esito sorprendente, in quanto la semplice strategia delineata assicura una probabilità di vincita di oltre 1/3 anche per valori grandissimi di *n*.

Naturalmente, la conseguenza di questi risultati è che un'analisi accurata e attenta nella scelta del partner può ripagare coloro che sono tuttora single. Come diceva Oscar Wilde, la felicità di un uomo sposato dipende dalle donne che non ha sposato (in modo meno sessista, oggi si direbbe che la felicità di chi è sposato dipende da coloro che non ha sposato).

Ancora una volta è opportuno ribadire che massimizzare la probabilità non significa la *certezza* di vincita (si ricordi anche il problema dell'auto e delle tre porte in [1]). E poi, Roberto "Freak" Antoni – già componente di spicco del gruppo rock demenziale degli Skiantos – non ci ha forse spiegato che "la fortuna è cieca, ma la sfortuna ci vede benissimo"? Va bene, non diceva proprio la "sfortuna", ma il senso è quello.

5.3. "To match" or "not to match"?

Questo rientra nella categoria dei problemi di *match* (accoppiamento, corrispondenza, abbinamento) o *coincidence*, per esempio, in giochi di carte [14], [20]. Gli accoppiamenti possono presentarsi in ciascuna delle *n* posizioni e in diversi posti simultaneamente. Il problema risale a Pierre Rémond de Montmort (1708), che lo risolse nel 1713, quasi contemporaneamente a Nicholas Bernoulli; fu poi generalizzato da Laplace e molti altri studiosi.

In una partita a carte, due amici con due normali mazzi di 52 carte, accuratamente mescolati, girano ciascuno una carta sul tavolo. Procedono così sino alla fine del mazzo. Se durante tutto lo svolgimento del gioco non escono mai contemporaneamente due carte uguali, tanto in seme quanto in valore, vince chi ha puntato su *no-match*; se invece, almeno una volta, escono due carte esattamente uguali, vince l'altro, che ha puntato su *match*. Su quale evento conviene puntare?

Soluzione. Di $n!$ permutazioni di n oggetti, quelle complete o "dismutazioni" (in inglese *derangement*, confusione)[8] sono circa $n!/e$, mentre nelle restanti si presenta almeno una coincidenza. Quindi scommettendo su *no-match* si vince con probabilità e^{-1} = 0,36789…, mentre la probabilità di vincere puntando su *match* è maggiore, cioè $1 - e^{-1}$ = 0,63212...

L'esperimento precedente può essere formulato anche in altri modi folcloristici. In particolare, i due mazzi possono essere sostituiti da *n* lettere e altrettante buste, sulle quali una segretaria per dispetto del principale si diverte a realizzare associazioni completamente casuali. In alternativa, si possono immaginare i cappelli depositati in un guardaroba, poi mescolati e distribuiti casualmente agli ospiti. Se una persona ottiene il proprio cappello, si parla di abbinamento corretto.

È interessante analizzare la dipendenza da *n* della probabilità di match, per esempio, come si rapporta il caso di 8 persone con quello di 10.000. Questa probabilità, fatto assai sorprendente, è praticamente indipendente da *n* e vale, in prima approssimazione, un po' meno di 2/3 [14].

[8] *Dati* n *elementi, una permutazione completa (dismutazione,* derangement*) è una permutazione tale che nessuno degli elementi appaia nella posizione originale (http://en.wikipedia.org/wiki/Derangement).*

5.4. A che giova “strozzare” strade e fiumi?

In tutti i problemi di traffico – stradale, telefonico, accesso a un servizio, ecc. – il punto di partenza per valutazioni analitiche è la distribuzione di Poisson, che ruota attorno alla *e* di Eulero (riquadro 1). In particolare, molti di noi si lamentano di avere spesso provato, in autostrada o in città, il disagio dovuto a un restringimento di carreggiata che fa passare da due corsie a una sola. Come succede, per esempio, in una rotatoria, causando nelle ore di punta code lunghissime in tutte le direzioni e in ogni verso. Questa è la ragione per cui in molte grandi città gli automobilisti hanno la sensazione che la rotatoria sia un intoppo messo lì apposta per farli arrivare tardi al lavoro o a cena.

Stupefacente è la pervicace ostinazione degli amministratori pubblici nell'affrontare senza adeguati criteri progettuali i problemi di viabilità e trasporto, quando sembrano ignorare un principio semplice ma fondamentale. Se in un punto di una qualsiasi rete stradale si crea una strozzatura – temporanea o permanente – e qualora il numero di veicoli che arrivano nell'unità di tempo sia superiore al numero dei mezzi smaltibili nello stesso tempo, la coda non può che continuare ad allungarsi. L'effetto, inevitabilmente, è una congestione che si propaga a macchia d'olio nella rete.

Eppure, sarebbero sufficienti poche semplici cognizioni di teoria delle code e di congestione del traffico [15], [19] per non torturare l'automobilista e non inquinare più del necessario l'aria respirata.

Considerazioni analoghe si applicano ai detriti sia naturali sia artificiali che occupano l'alveo di fiumi e torrenti montani provocando, con impressionante periodicità, alluvioni e disastri (davvero imprevedibili?) dopo poche ore di pioggia, sia pure intensa. Nonostante l'innegabile antropizzazione selvaggia, sarebbe auspicabile che si cominciasse almeno col tenerne puliti i letti eliminando strozzature e intoppi che impediscono il regolare defluire dell'acqua, evitando così che anche un rigagnolo, apparentemente insignificante, possa provocare danni enormi.

Beninteso, la manutenzione preventiva da sola non basta; gli interventi indicati sono certamente indispensabili – e non sono quasi mai fatti – ma rappresentano non più che rimedi palliativi insufficienti per risolvere il problema del dissesto dei territori interessati. In altri termini, per essere risolutivi è necessario intervenire radicalmente e organicamente sull'intero sistema idrogeologico con opere di ingegneria, non soltanto idraulica, commisurate ai rischi.

6. Legge di Benford e sequenze di Fibonacci

Uno dei misteri più avvincenti della matematica, in quanto sembra sfuggire all'intuizione e al senso comune (come il paradosso del compleanno illustrato in [1]), riguarda la legge di Benford, o legge della prima cifra[9]. Essa è attribuita al fisico Frank Benford, che la formulò nel 1938, analizzando sfilze di dati numerici (*dataset*) provenienti dai più disparati ambiti applicativi. Ma già quasi cinquant'anni prima, eravamo nel 1881, era stata scoperta dall'eclettico matematico e astronomo Simon Newcomb. Nel suo articolo (di due paginette apparse su *American Journal of Mathematics*), Newcomb esordisce facendo notare che nei prontuari dei logaritmi le pagine con le tabelle che hanno "1" come prima cifra sono molto più consunte delle altre, probabilmente perché usate più spesso: "That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to any one making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones. The first significant figure is oftener 1 than any other digit, and the frequency diminishes up to 9".

La legge di Benford corrisponde alla distribuzione di probabilità (discreta) che attribuisce alla cifra d la probabilità $p_d = \log_{10}(d + 1) - \log_{10} d = \log_{10}(1 + 1/d)$, con $d = 1, 2, \ldots, 9$. Queste probabilità valgono

$$p_1 = 0{,}301 \qquad p_2 = 0{,}176 \qquad p_3 = 0{,}125 \qquad p_4 = 0{,}097$$

$$p_5 = 0{,}079 \qquad p_6 = 0{,}067 \qquad p_7 = 0{,}058 \qquad p_8 = 0{,}051 \qquad p_9 = 0{,}0456$$

La distribuzione $\{p_d\}$ differisce, quindi, in modo significativo dalla distribuzione uniforme con pesi $1/9 = 0{,}111\ldots$

Sfruttando le proprietà elementari dei logaritmi è agevole determinare la funzione di distribuzione di probabilità (o cumulativa) della prima cifra D considerata variabile aleatoria

$$P(D \leq d) = \log_{10}(d + 1), \text{ con } d = 1, 2, \ldots, 9$$

Feller dimostra in [15] che $\{p_d\}$ è plausibile come distribuzione della prima cifra significativa per numeri presi casualmente da una gran mole di costanti fisiche o di dati sperimentalmente osservati. Molto chiara è anche l'evidenza empirica della legge, esemplificata in [9]. Quella di Benford è, inoltre, l'unica distribuzione sulle cifre significative *invariante* rispetto ai cambiamenti di scala. In altri termini, se i dati sottostanti sono tutti moltiplicati per una stessa costante non nulla (per esempio nella conversione da un sistema metrico a un altro o quando i valori monetari sono espressi in un'altra valuta), i dati nella nuova scala devono soddisfare esattamente la stessa legge.

[9] *Da non confondere con la legge della controversia: "La passione è inversamente proporzionale alla quantità di informazione di cui si dispone"* (Timescape, *1980) del fisico e scrittore di fantascienza Gregory Benford.*

Un esperto di statistica potrebbe quindi scommettere, con probabilità a suo favore, che un numero scelto a caso nelle tavole di logaritmi, nella dichiarazione dei redditi o in qualsiasi compendio di numeri casuali, abbia la prima cifra significativa minore di 5. Al contrario, uno scommettitore ingenuo, puntando sull'uniformità delle nove cifre (tutte le cifre equiprobabili), si aspetterebbe che la probabilità di una cifra minore o uguale a 4 sia 4/9: in realtà questa probabilità risulta prossima a 0,7. (Ricordate: a lungo andare, il banco vince sempre, in tutti i giochi d'azzardo!).

Non è sorprendente che i funzionari dell'IRS (*Internal Revenue Service*), il servizio delle entrate del Governo federale degli USA – l'analogo della nostra Agenzia delle entrate – verifichino regolarmente se i dati dichiarati dai contribuenti siano basati sulla legge di Benford anziché sulla distribuzione uniforme. Quando capita il secondo caso, viene loro più di un dubbio – se non la certezza – riguardo alla veridicità della dichiarazione. Una ricorrente leggenda metropolitana narra che anche Bill Clinton sia stato colto in fallo. In realtà, l'analisi delle sue dichiarazioni dei redditi dal 1977 al 1992 ha rilevato che i numeri sono sì un po' "aggiustati", però senza evidenza di frode.

Un impensabile accordo con la legge è fornito dalla successione dei numeri di Fibonacci (in origine, Leonardo da Pisa), definiti dalla relazione

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ per } n \geq 3, \text{ con } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1$$

Ne consegue che

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

Per esempio, considerando i primi 100, 1.000, 10.000 numeri di Fibonacci, la distribuzione delle nove cifre risulta come nella tabella 4 [21].

Prima cifra	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Percentuale su 100	30	18	13	9	8	6	5	7	4
Percentuale su 1.000	30,1	17,7	12,5	9,8	8,0	6,7	5,6	5,3	4,5
Percentuale su 10.000	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6
Legge di Benford	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Tabella 4. Frequenza (in per cento) della cifra iniziale nei primi 100, 1.000 e 10.000 numeri di Fibonacci. (*Da [21]*). Per comodità di confronto si riportano anche i valori di frequenza di Benford.

È da ricordare anche che

$$\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n-1} = \Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots$$

dove ***Φ*** – talora denotato con la minuscola ***φ*** o anche con *Phi* – è il rapporto aureo, simbolo scelto in onore dello scultore greco Fidia, rappresentando la lettera iniziale del suo nome scritto con l'alfabeto greco: ***Φειδίας***. Alcune statue realizzate da Fidia per il Partenone di Atene seguono il canone aureo. Tuttavia non esiste documentazione storica la quale accerti che la scelta dello scultore sia stata voluta scientemente.

Un altro risultato importante, derivabile da una delle tante formule attribuite a Jacques Binet (e disponibili su Wikipedia), è che l'*n*-esimo numero di Fibonacci uguaglia $\Phi^{n}/\sqrt{5}$ arrotondato all'intero più vicino. Vi sono undici numeri di Fibonacci nell'intervallo 1-100, ma solo tre in totale nei tre successivi intervalli di cento: i numeri di Fibonacci, in definitiva, seguono una legge di potenza.

Anche la successione dei numeri primi, pur non soddisfacendo la legge di Benford in senso stretto, segue una sua generalizzazione [22].

È possibile estendere la legge alle cifre dopo la prima. La distribuzione della cifra *m*-esima, all'aumentare di *m*, approssima rapidamente la distribuzione uniforme con il 10% di ognuna delle dieci cifre. La quarta cifra ($m = 4$) è già sufficiente per approssimare una distribuzione uniforme, infatti, "0" appare nella quarta cifra il 10,02% delle volte, mentre "9" vi appare per il 9,98%.

L'anomala e curiosa stranezza della prima cifra viene quasi equiparata a una misteriosa legge di natura; i tentativi per spiegarla vanno dal supernaturale alla teoria matematica della misura. Considerazioni alla Benford trovano applicazione in molti settori, dal rilevamento di informazioni numeriche e immagini artatamente manipolate alla partizione della memoria nei computer. In generale, hanno grande importanza nella diagnosi di modelli matematici in biologia, economia, finanza, ecc., in cui si richieda lo studio della prima cifra di grandi moli di dati di origine casuale.

Il numero di pubblicazioni sull'argomento è conseguentemente molto cresciuto negli ultimi anni. Fortunatamente i conduttori di programmi pseudoscientifici, pronti a servizi sensazionalistici su mistero e paranormale, non sembrano essersi ancora accorti della legge – o, forse, non l'hanno capita. Pertanto, ci hanno risparmiato i travisamenti e le banalizzazioni esoteriche sull'argomento solitamente propinati per aumentare l'audience.

La ragione del perché la legge di Benford si manifesti rimane, peraltro, un po' sfuggente. Anche se al lettore versato nella teoria statistica delle comunicazioni non sarà passato inosservato che la formula log (1 + 1/*d*) è strutturata come la capacità, definita da Claude Shannon, di un canale di comunicazione AWGN (*Additive White Gaussain Noise*), disturbato, cioè, da rumore gaussiano a spettro di frequenza costante. Il modello AWGN risulta dall'applicazione del teorema del limite centrale in teoria delle probabilità. Sembra, perciò, possibile ipotizzare che proprio in questa analogia risieda l'intrinseca ragione "fisico-matematica" per legittimare la legge di Benford. In altri termini, il criterio generale sembra essere che ogni sfilza di numeri a massima entropia, nel senso di Shannon, segua una distribuzione in accordo con tale legge.

7. Conclusioni

Al mondo ci sono tre tipi di persone: quelle che sanno contare e quelle che non sanno contare
Ian Stewart

Dove si insegna, ci sia il divertimento
Michel Eyquem de Montaigne

L'Italia appare oggi poco competitiva sulla scena mondiale, benché, ancora recentemente, il nostro Paese fosse riconosciuto protagonista nell'arena tecnologica e scientifica, per esempio in quella dell'ICT [23]: occorre quindi trovare le chiavi per tornare almeno a quel passato prossimo. Una società più istruita, competente e costantemente aggiornata è l'unica che possa garantire posti di lavoro qualificati e che possa formare personale preparato per quegli stessi posti. Ricerche empiriche di Enrico Moretti – economista italiano da vent'anni all'Università di Berkeley – mostrano che in una città media degli USA, e non solo nella Silicon Valley, per ogni posto di lavoro in aziende d'avanguardia (ICT, smart grid, transizione energetica, ecc.) se ne generano altri cinque in settori tradizionali [24]. Anche noi, per recuperare, non possiamo che seguire una strategia fondata su: ricerca e innovazione tecnologica, più (formazione del) capitale umano in settori tecnico-scientifici. Investire in queste direzioni significa investire nel futuro del Paese. Purtroppo, anche molti nostri manager d'impresa presentano carenze cognitive, di preparazione professionale, e scarsa capacità di aggiornamento (di stare, cioè, al passo con i tempi).

Peraltro, già adesso i lavoratori della conoscenza contribuiscono concretamente all'economia italiana. Per apprezzare l'entità di questo impatto, anche in prospettiva futura, è significativo uno studio commissionato dalla Società Italiana di Fisica alla società di consulenza Deloitte. Il risultato è che le imprese che basano le loro attività su conoscenze generate dalla fisica e dalla tecnica elettronica oggi impiegano un milione e mezzo di dipendenti e contribuiscono al nostro PIL per più del 7%.

Prendiamo in prestito la tesi sostenuta in [25]: "Viviamo in una società fondata su scienza e tecnologia. La scienza, è il caso di dirlo, ci circonda. Eppure, i programmi scolastici delle materie scientifiche rimangono gli stessi di cinquant'anni fa. Perché l'insegnamento della scienza possa acquistare un senso, occorre invece fare delle scelte metodologiche e di contenuto che rompano rispetto alla tradizione e che consentano innanzitutto di far assaporare agli studenti 'il gusto di fare scienza'" – e, continuano gli autori – "Se chiedessimo agli studenti delle superiori quali sono le materie meno amate, le materie scientifiche sarebbero ai primi posti". A sua volta, una formazione attenta alla cultura scientifica deve innestarsi su un'istruzione così orientata fin dalla scuola dell'obbligo, a partire da nozioni elementari di probabilità.

Beninteso, come ammonisce saggiamente Montaigne, gli studenti imparando dovrebbero anche divertirsi senza essere afflitti dalla monotonia di una didattica greve e tediosa, ancorata a cliché vecchi e stantii. In questo modo, anche gli insegnanti, oltre a fare un'attività di per sé più utile, potrebbero trovare proprie ragioni di maggiore gratificazione.

Non è mai stato così facile e così poco costoso, come oggi, produrre informazioni quantitative e dati statistici. A tutto questo si aggiungono la crescita esponenziale degli *open data* (cioè la diffusione gratuita e in forma "aperta", tale da facilitarne il riutilizzo, dei dati riguardanti il funzionamento delle organizzazioni pubbliche e private) e, più recentemente, lo sviluppo dei big data. Il processo di apprendimento della scienza dei dati (*data science*) è stimolante, richiedendo conoscenze su una vasta gamma di argomenti e tecnologie.

L'analoga scienza delle decisioni, cioè la capacità di arrivare a scelte ponderate e intelligenti basate sui dati disponibili, costituisce uno degli skill più importanti in tutte le aree delle attività di business, private e pubbliche. Il cambiamento basato su una dotazione di competenze qualitative (soft) e quantitative (hard) favorisce chi possiede conoscenze di questo tipo; infatti, decidere con intelligenza significa sapere prendere decisioni migliori per ottenere migliori risultati. Parafrasando il detto anglosassone "quando il gioco si fa duro i duri cominciano a giocare", si potrebbe dire che quando "il gioco si fa *smart*, le persone *smart* cominciano a giocare".

A proposito di evoluzione, decisioni e io cosciente, le più recenti ricerche biologiche e di neuroscienze hanno provato che la biologia non è destino, e questa è la buona notizia. D'altra parte, i risultati sui processi decisionali, mostrando che l'attività cerebrale ad essi collegata precede l'azione cosciente, hanno aperto la strada a nuove ricerche sull'esistenza (o meno) del libero arbitrio e, quindi, sui meccanismi decisionali. Anche se il dibattito filosofico-scientifico che ne sta scaturendo è certamente molto stimolante, una sua valutazione qui è ben oltre lo scopo del presente lavoro – per non dire delle competenze dell'autore.

Per concludere, menzioniamo alcuni argomenti (importanti nella prospettiva adottata nell'articolo), che non hanno trovato qui spazio, ma che potrebbero essere oggetto di illustrazione in altre occasioni. Si segnalano, in particolare, per la loro influenza sulla nostra vita quotidiana: il dilemma dei prigionieri come problema di teoria dei giochi; il truffaldino schema di Ponzi, alla base del crac Madoff; le scelte sociali, in politica e democrazia (dal paradosso del Marchese de Condorcet ai teoremi dei Nobel Kenneth Arrow e Amartya Sen); l'intelligenza collettiva nelle reti sociali e nel Web 2.0. Altrettanto interessante sarebbe approfondire le tecniche bayesiane utilizzate dal geniale Alan Turing per decrittare il cifrario tedesco Enigma nella seconda guerra mondiale.

Riquadro 1 – Una cassetta degli attrezzi di probabilità

If you're not thinking like a Bayesian, perhaps you should be
John Allen Paulos

Elenchiamo, sia pure in forma schematica, alcuni strumenti e risorse – libri, relazioni, formule – essenziali per affrontare i problemi trattati nell'articolo.

Tuttora insuperabili per riuscire a "far di conto", pur non certamente facili, sono i due volumi sulle probabilità di William Feller [14], [15], ricchissimi di esempi ed esercizi pratici. Altrettanto prezioso e impegnativo è il libretto di Frederick Mosteller che discute più di cinquanta problemi di probabilità, pubblicato originariamente nel 1965 dalla Addison-Wesley e successivamente ristampato dalla Dover nel 1987 [20]. (I 50 "sfidanti" problemi promessi, in realtà, sono 56). A chi avesse tempo si segnala il corso online sulle probabilità, a livello undergraduate, tenuto al MIT da John Tsitsiklis [26]. Il sito relativo contiene *tutto* il materiale del corso, dai video alle note delle lezioni. Ovviamente, anche Wikipedia costituisce oggi un imprescindibile riferimento di base per questa materia.

Uno strumento fondamentale di teoria delle probabilità è la regola, o teorema, del reverendo Thomas Bayes (1701-1761), pubblicato postumo nel 1763. Questo risultato può essere derivato come segue.

> La probabilità $P(AB)$ dell'evento congiunto A e B è $P(AB) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$, dove $P(A/B)$ e $P(B/A)$ sono le probabilità subordinate o condizionate.
>
> Ne discende subito la forma speciale della **regola di Bayes:** $\boldsymbol{P(A/B) = P(B/A)P(A)/P(B)}$.

Le probabilità $P(A)$ e $P(B)$ sono anche dette *probabilità a priori*, quindi, le condizionate $P(A/B)$ e $P(B/A)$ diventano *probabilità a posteriori*.

Intuitivamente, il teorema descrive come la probabilità nell'osservare l'evento A sia modificata dall'osservazione di B. Se però $P(B/A) = P(B)$, allora $P(AB) = P(A)P(B)$ e $P(A/B) = P(A)$, cioè gli eventi A e B sono statisticamente indipendenti e non vi è influenza alcuna sulle loro probabilità condizionate.

Una forma semplificata del teorema s'incontra nel caso binario di A e $\neg A$ (cioè A e "non A") mutuamente esclusivi: $P(A/B) = P(B/A)P(A)/[P(B/A)P(A) + P(B/\neg A)P(\neg A)]$. Tale situazione, in pratica molto comune, è quella degli esempi discussi nei paragrafi 3 e 4. È disponibile online un utilissimo simulatore interattivo sviluppato per questo contesto da Mike Shor [27].

Nel corso dei secoli, la letteratura statistica ha visto un acceso dibattito filosofico sulla validità del teorema di Bayes [17]. Feller [14], per esempio, mette, correttamente, in guardia, su un suo uso irrazionale (cfr. il tacchino "induttivista" in 4.2). Entrando nel merito della discussione, vale la pena di ricordare che il teorema costituisce una conclusione perfettamente valida in quanto dedotta dagli assiomi di probabilità e dalla definizione di probabilità condizionata.

L'unico punto possibile di disputa è se, in una applicazione pratica, si abbiano (o no) valori affidabili (o anche ragionevoli) per le probabilità *a priori* e *a posteriori*. Una questione di questo tipo, naturalmente, deve essere posta per un *qualsiasi* risultato derivante da un modello matematico applicato a problemi del mondo fisico.

Altri strumenti specifici fra le distribuzioni di probabilità sono la binomiale e quella di Poisson, rispettivamente:

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$P(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Ricordiamo che la distribuzione di probabilità binomiale (nel discreto), in certe condizioni, è approssimata dalla poissoniana (nel continuo). Il risultato consegue da uno dei tanti sviluppi in serie o limiti in cui appare la *e* di Eulero, due esempi per tutti:

$$e = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

e

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

La relazione $(1 + 1/n)^n$ esprime anche la maturazione annuale di un capitale iniziale di € 1 per il quale l'interesse composto del 100% – valore peraltro assai poco realistico – sia corrisposto *n* volte nell'arco dell'anno. Se $n = 365$, cioè se l'interesse viene calcolato giorno per giorno, il capitale iniziale risulta moltiplicato per $(1 + 1/365)^{365} = 2{,}71456\ldots$ Jakob Bernoulli (1683) ha studiato la formula $(1 + 1/n)^n$, mentre Eulero ha successivamente dimostrato che il suo limite (capitalizzazione continua) è esattamente *e*.

Più in generale $(1 + m/n)^n$, con *m* intero positivo o negativo, tende a e^m al crescere dell'intero *n*. L'importante caso particolare $1/e$ (cioè, $m = -1$) corrisponde al limite di $(1 - 1/n)^n$.

Poiché fattoriali, permutazioni e combinazioni sono frequenti nei calcoli combinatori di probabilità, un'altra formula utile è l'approssimazione di Sterling quando il fattoriale *n*! è molto grande

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad per \ \ n \to +\infty$$

Per non appesantire la trattazione, non ci dilunghiamo su questi e altri aspetti teorici, che lasciamo ai testi già citati e ai manuali di analisi matematica. D'altra parte, è poco elegante – si dice un po' ironicamente – esibire in pubblico troppe formule. Lo scopo di riportare le relazioni precedenti è unicamente per mostrare che problemi dalle origini più disparate possono presentare metodi di soluzione molto simili.

Un altro punto sottolineato nell'articolo è l'importanza dei processi decisionali basati sulla razionalità scientifica e sulla consapevolezza dei fatti concreti – non certamente sul dogmatismo scientifico (scientismo). Un cenno meritano perciò il critical thinking e le tecniche di argomentazione logica – il saper produrre ragionamenti rigorosi, fondati sui fatti accertati, cogenti e, in quanto tali, sempre passibili di affinamenti o, addirittura, di confutazioni. Sfortunatamente, capacità di problem solving, ragionamento logico e critica in autonomia sono competenze non ancora diffusamente curricolari. In quest'ambito, fondamentali e aggiornati sono i testi della filosofa della scienza Franca D'Agostini, in particolare, i due manuali sulla logica [28] e [29].

Riquadro 2 – Crescita esponenziale, singolarità, coincidenze

La somma delle coincidenze ci dà la certezza
Aristotele

La crescita esponenziale è stata ampliamente trattata in [1]. Ma, poiché fornisce uno strumento importante sia in bioinformatica sia nella teoria delle reti, sembra opportuno qui riprenderla. Per illustrare il concetto, implicito nel sottoparagrafo 2.1 sull'evoluzione biologica, riportiamo l'efficace apologo raccontato da Albert Bartlett, fisico all'Università del Colorado.

Immaginate una popolazione di batteri che si riproducono, ciascuno scindendosi in due ogni minuto. Due diventano quattro, quattro diventano otto e via dicendo. Mettete un batterio in una provetta alle ore 11,00 del mattino, per scoprire che a mezzogiorno la provetta è piena. A che ora è piena la metà?

La provetta è mezza piena solo alle 11,59 e alle 11,55 ci sarebbe ancora un sacco di spazio libero, il 97% del totale. Credete forse che i batteri si rendano conto di essere sul punto della catastrofe con tutto quello spazio a disposizione?

Del resto, abbiamo già visto in [1] che il valore teorico di una rete sociale, essendo proporzionale a $2^n - n - 1$, cresce esponenzialmente con n. David Hand [30] definisce questa situazione come "legge delle combinazioni", applicabile quando molte persone o oggetti possono interagire, rispettivamente in social network o nella Internet delle cose (IoT, *Internet of Things*). Con $n = 30$ il numero di gruppi diversi che si potrebbero costituire è superiore a un miliardo.

Se n = 100 il risultato è circa 10^{30}, un numero che colpisce per l'ordine di grandezza.

Oggi, grazie a Internet, esistono altre forme di aggregazione dell'informazione e delle preferenze, anche di quelle che non passano per il mercato: si pensi agli studi sulla cosiddetta "intelligenza collettiva" (*wisdom of crowds*) [31] su cui si basa il Web 2.0, sempre più caratterizzato dalla interattività per cui l'utente è contemporaneamente fruitore e produttore – o *prosumer* (*producer* + *consumer*) secondo la terminologia del futurologo Alvin Toffler, ormai di alcuni decenni fa. Considerando che il Web attualmente ha circa 2,5 miliardi di utenti, ne consegue un numero stratosferico di possibili sottoinsiemi di elementi che interagiscono. Ecco perché eventi con probabilità molto bassa diventano quasi certi se hanno abbastanza chance di accadere (cfr. anche il paragrafo 2).

Tutto ciò è alla base del principio di improbabilità, tant'è che un estratto del libro di Hand (*Le Scienze*, aprile 2014, pp. 58-61) è significativamente intitolato "Mai dire mai", che riecheggia il ben noto film di James Bond.

Riquadro 3 – Lotterie e probabilità: lo Stato biscazziere

Chi fida nel Loto, no magna né cruo né coto (Chi spera nel Lotto non mangia né crudo né cotto)
Proverbio veneto

Suam habet fortuna rationem
Petronio, *Satyricon*

Il proverbio sul Lotto è certamente vero, ma ci sono anche le singolarità, le improbabilità, i cigni neri: un evento deve pur accadere (si veda anche la tabella 1); analogamente, la fortuna ha una sua logica (copyright di Petronio).

È possibile legare insieme coincidenze singolari, serendipità e (forse) legge di Benford, come nello scambio di email fra me e Peres, uscito poi nella rubrica "Scherzi da Peres" sulla rivista *Linus* nel settembre 2013 (pp. 121-122). Riporto la mia lettera iniziale:

> [Caro Ennio,] vorrei proporti una riflessione sul gioco d'azzardo, tema sempre più di moda, soprattutto in tempi di crisi, in cui si ricercano alternative per ottenere facili, ancorché illusori, guadagni. […].
>
> C'è, tuttavia, un caso reale che mi rende perplesso: quello di Joan Ginther – "The Luckiest Woman on Earth" secondo *Harper's Magazine* (agosto 2011) – che al Gratta e Vinci texano ha vinto almeno quattro volte dal 1993 al 2010 per un totale di oltre 10 milioni di dollari. La sua fortuna è mitica perché, considerando tutta la sua carriera di giocatrice, avrebbe cumulato ben 20 milioni di dollari. Fatto interessante è che trattasi di un'ex professoressa di matematica con una laurea di dottorato in statistica (Università di Stanford).

> La vicenda mi fa però venire più di un dubbio e dovrebbe essere bene analizzata approfondendo tutte le circostanze. Sintetizzando al massimo, direi che vi sono soltanto tre spiegazioni possibili. La prima (*dumb luck*), basata su pure e fortunate coincidenze – possibili, anche se improbabili – è che la Ginther sia stata baciata con sospetta regolarità dalla dea bendata. La seconda (*inside job*) è che ci sia stata una sorta di combutta fra la Ginther e i titolari degli esercizi commerciali dove ha vinto, in particolare in un distributore di benzina (tre dei quattro premi milionari). La reticenza dei negozianti nel rilasciare dichiarazioni in merito è piuttosto significativa. Il fatto è che la lotteria che vediamo in televisione è completamente (?) casuale, mentre il meccanismo del Gratta e Vinci è assai differente. E qui viene la terza spiegazione (*code cracking*), legata alla serendipity – cioè fortuna coniugata con il talento – per cui la Ginther potrebbe avere utilizzato una strategia che sfrutta le probabilità a favore. Per esempio, potrebbe avere applicato – è solo una mia congettura – la *legge di Benford*, la quale smentisce la credenza popolare che la distribuzione della prima cifra significativa relativa a un insieme di numeri generati casualmente in un insieme reale sia uniforme. […].

Ed ecco l'acuta risposta di Peres:

> […] in merito alla vicenda della signora Joan Ginther, tra le ipotesi che avanzi, a me sembra molto più verosimile la prima. Bisogna sempre pensare che, anche un evento estremamente improbabile, prima o poi, in qualche parte del mondo, ha la possibilità di verificarsi. A mio avviso, se la signora avesse trovato un sistema (lecito o truffaldino) per vincere, non si sarebbe limitata a farlo solo quattro volte, nell'arco di 18 anni. Comunque, tra le tante fortune che Joan Ginther può vantare, bisogna includere anche quella di non risiedere in Italia... Da noi, infatti, le vincite fuori dell'ordinario vengono automaticamente bollate come fraudolente e non pagate. Ne sanno qualcosa i coniugi Walter Scognamiglio e Angela Antidormi, residenti ad Avezzano, che nel 2001, nel giro di 15 giorni, vinsero tre premi da 2 miliardi di lire al Gratta e Vinci, in maniera del tutto regolare. Il Ministero delle Finanze, però, bloccò la riscossione dei premi, per presunte manomissioni dei tagliandi vincenti. I due, ovviamente, avviarono un'azione legale per reclamare i propri diritti; ma siccome, nell'euforia della vincita, avevano abbandonato il lavoro, dovettero cominciare a contrarre dei debiti, per poter tirare avanti. Non so come si sia risolta questa faccenda, ma ho la forte sensazione che l'abbia spuntata il nostro Stato biscazziere...

A mio avviso, la coincidenza rimane perlomeno strana. È anche da notare che le tre possibilità prima suggerite non sono mutuamente esclusive. Tuttavia, della legge di Benford in questo caso sarebbe da provare l'applicabilità, se non altro in modo empirico. Se fosse così, avremmo la riprova che (secondo Virgilio e, secoli dopo, Machiavelli) *audentes fortuna iuvat*, o che "il caso aiuta la mente preparata" (Louis Pasteur), due icastiche locuzioni che compendiano il senso della serendipità – una felice combinazione di fortuna e merito.

Bibliografia

[1] Luvison, A. (2013). "Apologia della ragione scientifica", *Mondo Digitale – Rassegna critica del settore ICT*, vol. XII, n. 45, 1-28, http://mondodigitale.aicanet.net/2013-1/articoli/05_LUVISON.pdf (ultimo accesso settembre 2014).

[2] Barabási, A.-L. (2011). *Lampi. La trama nascosta che guida la nostra vita*, Einaudi.

[3] Luvison, A. (2012). "Strategie di business innovation: il valore della rete" in Cannata, M., Pettineo, S. (a cura di) *Manager e imprese di fronte al cambiamento. Strategie e strumenti*, ebook, Fondazione IDI, 245-263, http://www.fondazioneidi.it/web/guest (ultimo accesso settembre 2014).

[4] Sfeir, J. (2014). "Come estrarre valore economico dai 'Big Data'", *AEIT*, vol. 101, n. 1-2, 44-48.

[5] Poundstone, W. (2004). *How Would You Move Mount Fuji? Microsoft's Cult of the Puzzle—How the World's Smartest Companies Select the Most Creative Thinkers*, Little Brown & Co.

[6] Poundstone, W. (2013). *Sei abbastanza sveglio per lavorare in Google? Test, quiz, rompicapi e indovinelli: tutto quello che devi sapere per sostenere un colloquio di lavoro ai tempi dell'economia globale*, Mondadori.

[7] Davenport, T., Kim, J. (2013). *Keeping Up with the Quants: Your Guide to Understanding + Using Analytics*, Harvard Business Review Press.

[8] Levitin, A., Levitin, M. (2011). *Algorithmic Puzzles*, Oxford University Press.

[9] Peres, E. (2010). *Un mondo di coincidenze. Curiosità, teorie e false credenze in merito ai capricci del Destino*, Ponte alle Grazie.

[10] de Duve, C. (2008). *Alle origini della vita*, Longanesi.

[11] Kahneman, D. (2012). *Pensieri lenti e veloci*, Mondadori.

[12] Schneps L., Colmez, C. (2013). *Math on Trial: How Numbers Get Used and Abused in the Courtroom*, Basic Books.

[13] Luvison, A. (2012). "Teoria dell'informazione, scommesse, giochi d'azzardo", *Mondo Digitale – Rassegna critica del settore ICT*, vol. XI, n. 42, 1-16, http://mondodigitale.aicanet.net/2012-2/articoli/05_luvison.pdf (ultimo accesso settembre 2014).

[14] Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: Volume I*, 3rd ed., Wiley.

[15] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: Volume II*, 2nd ed., Wiley.

[16] Silver, N. (2012). *The Signal and the Noise. The Art and Science of Prediction*, Allen Lane.

[17] McGrayne, S.B. (2012). *The Theory That Would Not Die: How Bayes' Rule Cracked the Enigma Code, Hunted Down Russian Submarine, & Emerged Triumphant from Two Centuries of Controversy*, Yale University Press.

[18] Morini, S. (2014). *Il rischio. Da Pascal a Fukushima*, Bollati Boringhieri.

[19] Pattavina, A. (2007). *Reti di telecomunicazioni. Networking e Internet*, seconda edizione, McGraw-Hill.

[20] Mosteller, F. (1987). *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Dover.

[21] Knot, R. (2014). *The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers*, http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html#section7 (ultimo accesso settembre 2014).

[22] Luque, B., Lacasa, L. (2009). "The first-digit frequencies of prime numbers and Riemann zeta zeros", *Proceedings of the Royal Society*, pubblicato online: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/early/2009/04/17/rspa.2009.0126.full.pdf (ultimo accesso settembre 2014).

[23] Biocca, A., Luvison, A. (2014). "Un secolo di telecomunicazioni nelle riviste AEI/AEIT", *AEIT*, vol. 101, n. 6, 20-28.

[24] Moretti, E. (2013). *La nuova geografia del lavoro*, Mondadori.

[25] Mayer, M., Parisi, G. (2014). "Appassionare alla scienza", *MicroMega*, n. 6, 22-31.

[26] Tsitsiklis, J. (Fall 2013). *Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability*, MIT OpenCourseWare 6.041SC, http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013 (ultimo accesso settembre 2014).

[27] Shor, M. (2014). "Bayes rule simulator", Interactive applet on *Game Theory* .net. http://www.gametheory.net/mike/applets/Bayes/Bayes.html (ultimo accesso settembre 2014).

[28] D'Agostini, F. (2012). *I mondi comunque possibili. Logica per la filosofia e il ragionamento comune*, Bollati Boringhieri, 2012.

[29] D'Agostini, F. (2014). *Logica in pratica. Esercizi per la filosofia e il ragionamento comune*, Carocci.

[30] Hand, D. (2014). *Il caso non esiste. Perché le cose più incredibili accadono tutti i giorni*, Rizzoli.

[31] Surowiecki, J. (2005). *The Wisdom of Crowds*, Anchor Books.

Biografia

Angelo Luvison, ingegnere elettronico dal 1969 (Politecnico di Torino), si è perfezionato in teoria statistica delle comunicazioni al MIT e in management aziendale all'INSEAD-CEDEP di Fontainebleau. È consulente per la formazione permanente dei dirigenti industriali. È stato professore di *Teoria dell'informazione e della trasmissione* all'Università di Torino. Per oltre trent'anni in CSELT, ha svolto e coordinato ricerche in teoria delle comunicazioni, reti di fibre ottiche ad alta velocità, società dell'informazione. Ha ricoperto la posizione di segretario generale dell'AEIT. Detiene sette brevetti ed è autore, o coautore, di oltre 180 pubblicazioni. È *Life Member* dell'IEEE.

Email: angelo.luvison@alice.it